

موسسه بابان

راهیان ارشد و دکتری انتشارات بابان

جبر خطی

فصل سوم: فضای برداری

(ویژه کنکور ارشد و دکتری ۱۴۰۶)

ویژه داوطلبان کنکور ارشد و دکتری مهندسی کامپیوتر و علوم کامپیوتر

براساس کتب مرجع

دیوید سی. لی، استیون آر. لی، جودی جی. مکدونالد، فیلیپ ان. کلاین، بن نوبل، جیمز دبلیو. دنیل

ابوالفضل گیلک

بسم الله الرحمن الرحيم

مبانی ماتریس ها و جبر خطی

ابوالفضل گیلک

فصل سوم: فضای برداری

- فضای برداری
- زیرفضای برداری
- اعمال جبری بر زیرفضاها
- پایه و بعد
- مختصات
- تغییر پایه
- زیرفضاهای چهارگانه
- زیرفضاهای متعامد

فضای برداری

3

فضای برداری

فضای برداری V روی میدان F ساختاری جبری با دو عمل جمع بردارها و ضرب اسکالر است. (اعضای V را بردار می‌نامیم). V با عمل جمع یک گروه آبدی است: بسته و شرکت‌پذیر است، دارای یک عضو خنثی عمل جمع است که بردار صفر نام دارد (0_V) ، هر بردار $x \in V$ دارای قرینه $-x \in V$ است. ضرب اسکالر نیز باید ویژگی‌های زیر را داشته باشد:

برای بردارهای دلخواه $x, y \in V$ و اسکالرهایی دلخواه $c_1, c_2, c \in F$:

$$1_F x = x, \quad 0_F x = 0 \quad -$$

$$c_1(c_2 x) = (c_1 c_2)x \quad -$$

$$(c_1 + c_2)x = c_1 x + c_2 x \quad -$$

$$c(x + y) = cx + cy \quad -$$

مثال: $\mathbb{R}^n$ روی میدان $\mathbb{R}$ یک فضای برداری است. به طور کلی مجموعه F^n روی میدان F ، یک فضای برداری است.

مثال: مجموعه همه ماتریس‌های $n \times m$ با درایه‌های حقیقی روی میدان $\mathbb{R}$ یک فضای برداری است. این فضای برداری را با $M_{n \times m}(\mathbb{R})$ نشان می‌دهیم.

مثال: مجموعه همه توابع پیوسته حقیقی یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{R}$ است.

$$C(\mathbb{R}) = \{f \mid f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ continuous}\}$$

مجموع پیوسته‌ها، پیوسته است. مضرب هر تابع پیوسته، پیوسته است.

مثال: مجموعه چندجمله‌ای‌های حداکثر درجه n با ضرایب حقیقی را $P_n[\mathbb{R}]$ می‌نامیم که یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{R}$ است.

$$P_n[\mathbb{R}] = \{a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0 \mid a_n, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$$

$P_n[\mathbb{R}]$ نسبت به جمع و ضرب اسکالر بسته است. مجموع دو چندجمله‌ای حداکثر درجه n یک چندجمله‌ای حداکثر درجه n است. گزینه هر چندجمله‌ای یک چندجمله‌ای با همان درجه است.

نکته:

چندجمله‌ای $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in P_n[\mathbb{R}]$ نظیر بردار $[a_n \dots a_1 a_0]^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ است. در بخش‌های بعدی می‌بینیم که فضای $P_n[\mathbb{R}]$ یکرخت با فضای $\mathbb{R}^{n+1}$ است.

توجه:

مجموعه چندجمله‌ای‌های درجه n (دقیقا درجه n) با ضرایب حقیقی، یک فضای برداری نیست. چون نسبت به عمل جمع، بسته نیست. ممکن است جمله X^n در مجموع، حذف شود و چندجمله‌ای با درجه کمتر از n به دست آید.

مثال:

مجموعه همه توابع از $\{1, 2, 3\}$ به $\mathbb{R}$ را با نماد $\mathbb{R}^{\{1, 2, 3\}}$ نشان می‌دهیم. $V = \mathbb{R}^{\{1, 2, 3\}}$ با اعمال جمع توابع و ضرب اسکالر، یک فضای برداری است. تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ نظیر بردار $[f(1) \ f(2) \ f(3)]^T \in \mathbb{R}^3$ است.

[در فصل‌های بعدی می‌بینیم که فضای $V = \mathbb{R}^{\{1, 2, 3\}}$ با فضای $\mathbb{R}^3$ یکرخت است.]

مثال: فضای برداری دنباله‌های حقیقی

فرض کنیم $W = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ مجموعه همه توابع از $\mathbb{N}$ به $\mathbb{R}$ باشد. (مجموعه همه دنباله‌های حقیقی). این مجموعه با عمل جمع دنباله‌ها و عمل ضرب اسکالر، یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{R}$ است. [آیا W نیز با یکی از فضاها $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4, \dots$ یکرخت است؟ خیر!]

مثال:

ساختارهای جبری $V = (\mathbb{R}^n, \oplus, \otimes)$ و $W = (\mathbb{R}^2, \oplus, \otimes)$ با اعمال دوتایی زیر تعریف شده‌اند. کدام یک از آنها فضای برداری روی میدان $\mathbb{R}$ است؟

$$W = (\mathbb{R}^2, \oplus, \otimes)$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c \otimes \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cx_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V = (\mathbb{R}^n, \oplus, \otimes)$$

$$X \oplus Y = X - Y$$

$$c \otimes X = -cX$$

(۱) W و V هر دو فضای برداری‌اند.

(۲) هیچکدام فضای برداری نیستند.

(۳) فقط V فضای برداری است.

(۴) فقط W فضای برداری است.

پاسخ: گزینه ۲

عمل $\oplus$ (عمل تفریق) عضو خنثی ندارد. حتی بردار صفر نیز از هر دو طرف خنثی نیست. همچنین $\otimes$ شرکت‌پذیر نیست:

$$\begin{cases} (X \oplus Y) \otimes Z = (X - Y) - Z = X - Y - Z \\ X \otimes (Y \oplus Z) = X - (Y - Z) = X - Y + Z \end{cases} \Rightarrow (X \oplus Y) \otimes Z \neq X \otimes (Y \oplus Z)$$

همچنین عمل $\otimes$ نیز ویژگی‌های ضرب اسکالر را ندارد. برای مثال: $1 \otimes X = -X$ درحالی که باید $1 \otimes X = X$ باشد. پس V فضای برداری نیست.

در W عمل $\oplus$ عضو خنثی ندارد. مثلاً برای بردار $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ و هر بردار $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ داریم:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+x \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

پس W فضای برداری نیست.

زیرفضاها

فرض کنیم $(V, +, \times)$ یک فضای برداری روی میدان F باشد و $W \subseteq V$ باشد. W را زیرفضای V می‌نامیم هرگاه $(W, +, \times)$ نیز یک فضای برداری روی میدان F باشد. زیرفضا بودن را با علامت $W \leq V$ نشان می‌دهیم.

زیر فضاهای $\mathbb{R}^2$:

تک عضوی $\{(0,0)\}$ کوچکترین زیرفضای $\mathbb{R}^2$ است. هر خطی که از مبدأ بگذرد (مثل خط $y = 2x$) یک زیرفضای $\mathbb{R}^2$ است. بزرگترین زیرفضا نیز خود $\mathbb{R}^2$ است. به جز این‌ها زیرفضای دیگری ندارد.

زیر فضاهای $\mathbb{R}^3$:

تک عضوی $\{(0,0,0)\}$ کوچکترین زیرفضای $\mathbb{R}^3$ است. هر خطی که از مبدأ بگذرد ($ax = by = cz$) یک زیرفضای $\mathbb{R}^3$ است. هر صفحه‌ای که از مبدأ بگذرد ($ax + by + cz = 0$) یک زیرفضای $\mathbb{R}^3$ است. بزرگترین زیرفضا نیز خود $\mathbb{R}^3$ است. به جز این‌ها زیرفضای دیگری ندارد.

توجه: در هر فضای برداری V زیرفضای $\{0\}$ و V کوچکترین و بزرگترین زیرفضاها هستند.

$$\{0\} \leq V, \quad V \leq V$$

تشخیص زیرفضاها:

فرض کنیم W زیرمجموعه فضای برداری V باشد. می‌خواهیم ببینیم آیا W یک زیرفضا هست یا خیر؟ برخی خواص مانند شرکت پذیری عمل جمع، به صورت ارثی برقرار می‌شود. اما این موارد باید بررسی شوند: آیا W بردار صفر دارد؟ آیا $x \in W$ دارای قرینه در W است؟ آیا W نسبت به جمع بسته است؟ نسبت به ضرب اسکالر بسته است؟ قضیه زیر تمامی شرایط مورد نیاز برای زیرفضا بودن W را در یک شرط خلاصه می‌کند:

قضیه تشخیص زیرفضا ها:

فرض کنیم V فضای برداری روی میدان F باشد و $W \subseteq V$ ناتهی باشد. W زیرفضای V است اگر و تنها اگر برای هر جفت $x, y \in W$ و هر $c \in F$ داشته باشیم: $cx + y \in W$.

مثال: کدام یک از این مجموعه‌ها زیرفضای $V = \mathbb{R}^3$ است؟

- | | |
|---|-------------------|
| $W_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_2 - x_1 = 1\}$ | (۱) فقط W_3 |
| $W_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 x_2 x_3 = 0\}$ | (۲) W_2 و W_4 |
| $W_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \geq 0\}$ | (۳) فقط W_4 |
| $W_4 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ | (۴) W_3 و W_1 |

پاسخ: گزینه ۳

در W_1 معادله $x_2 - x_1 = 1$ ناهمگن است پس بردار صفر عضو W_1 نیست. در W_2 معادله $x_1 x_2 x_3 = 0$ غیرخطی است و نمی‌تواند یک زیرفضا تعریف کند. برای مثال بردارهای $(1, 1, 0)$ و $(0, 1, 1)$ عضو W_2 هستند اما مجموع آنها $(1, 2, 1)$ عضو W_2 نیست.

W_3 نیز زیرفضا نیست زیرا قرینه اعضایش را ندارد. مثلا $(1, 1, 1) \in W_3$ اما $(-1, -1, -1) \notin W_3$. اما W_4 زیرفضای $\mathbb{R}^3$ است: اگر $X = (x_1, x_2, x_3) \in W_4$ ، $Y = (y_1, y_2, y_3) \in W_4$ و c یک اسکالر باشد آنگاه:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \quad y_1 + y_2 - y_3 = 0 &\Rightarrow c(x_1 + x_2 - x_3) + (y_1 + y_2 - y_3) = 0 \\ \Rightarrow (cx_1 + y_1) + (cx_2 + y_2) - (cx_3 + y_3) = 0 &\Rightarrow cX + Y \in W_4 \end{aligned}$$

توجه:

در فضای برداری $\mathbb{R}^3$ روی میدان اعداد حقیقی، مجموعه جواب‌های معادلات خطی و همگن، یعنی معادلاتی مانند $ax + by + cz = 0$ (یا چند معادله توأم مانند آن) یک زیرفضا تشکیل می‌دهد.

مثال: فرض کنیم $p > 0$ ثابت باشد. آیا ساختار جبری $V = (\mathbb{R}^2, \oplus, \otimes)$ با این دو عمل یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ است؟

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + p \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}$$

$$c \otimes \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cx + (c-1)p \\ cy \end{bmatrix}$$

پاسخ:

V یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ است. V نسبت به عمل جمع $\oplus$ بسته است. این عمل شرکت پذیر است. عضو خنثی عمل $\oplus$ بردار $\begin{bmatrix} -p \\ 0 \end{bmatrix}$ است (یعنی این بردار، بردار صفر است).

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -p \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - p + p \\ y + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

قرینه بردار $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ بردار $\begin{bmatrix} -x - 2p \\ -y \end{bmatrix}$ است زیرا مجموع آنها بردار صفر است:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -x - 2p \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p \\ 0 \end{bmatrix}$$

عمل $\otimes$ نیز ویژگی‌های ضرب اسکالر را دارد. برای مثال:

$$1 \otimes \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + (1-1)p \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

ضرب اسکالر عدد صفر در هر بردار، برابر با بردار صفر است:

$$0 \otimes \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + (0-1)p \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p \\ 0 \end{bmatrix}$$

مثال: فرض کنید $P_2[\mathbb{R}] = \{a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$ فضای برداری چندجمله‌ای‌های با حداکثر درجه ۲ روی میدان $\mathbb{R}$ باشد. چه تعداد از این مجموعه‌ها زیرفضای $P_2[\mathbb{R}]$ هستند؟

$$V_1 = \{f \in P_2 \mid f(0) = f(1)\}$$

$$V_2 = \{f \in P_2 \mid f(0) = 1 \text{ and } f(1) = 0\}$$

$$V_3 = \{f \in P_2 \mid f'(0) = 0\}$$

$$V_4 = \{f \in P_2 \mid f(x) = xf'(x)\}$$

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا با استفاده از قضیه تشخیص زیرفضاها، نشان دهیم که همه به جز V_2 زیرفضای $P_2[\mathbb{R}]$ هستند.

$$f, g \in V_1 \Rightarrow f(0) = f(1), g(0) = g(1) \Rightarrow cf(0) + g(0) = cf(1) + g(1) \Rightarrow cf + g \in V_1$$

$$f, g \in V_3 \Rightarrow f'(0) = 0, g'(0) = 0 \Rightarrow cf'(0) + g'(0) = 0 \Rightarrow cf + g \in V_3$$

$$\begin{aligned} f, g \in V_4 \Rightarrow f(x) = xf'(x), g(x) = xg'(x) \Rightarrow cf(x) + g(x) &= cxf'(x) + xg'(x) \\ &\Rightarrow cf(x) + g(x) = x(cf'(x) + g'(x))' \Rightarrow cf + g \in V_4 \end{aligned}$$

اما V_2 زیرفضای $P_2[\mathbb{R}]$ نیست زیرا معادله $f(0) = 1$ ناهمگن است در نتیجه چندجمله‌ای ثابت صفر عضو V_2 نیست. همچنین V_2 نسبت به جمع بسته نیست.

توجه: اگر به تعریف مجموعه‌های V_1, V_3, V_4 دقت کنیم هر شرط عضویت در آنها یک معادله خطی

همگن برای ضرایب a_2, a_1, a_0 ایجاد می‌کند. مثلاً در V_1 شرط عضویت آن است که $f(0) = f(1)$ که برای چندجمله‌ای $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ به این معناست:

$$f(0) = f(1) \Rightarrow a_0 = a_2 + a_1 + a_0 \Rightarrow a_2 + a_1 = 0$$

معادله $a_2 + a_1 = 0$ یک معادله خطی همگن است. به همین ترتیب در V_3 شرط $f'(0) = 0$ به معنای آن

است که: $a_0 = 0$. شرط عضویت در V_4 نیز به معادلات خطی همگن منجر می‌شود:

$$f(x) = xf'(x) \Rightarrow a_2x^2 + a_1x + a_0 = 2a_2x + a_1x \Rightarrow a_2 = 0, a_1 = 0$$

این معادلات خطی همگن، زیرفضاها را مشخص می‌کنند. اما در مجموعه V_2 شرط عضویت $f(0) = 1$ به معادله ناهمگن $a_0 = 1$ منجر می‌شود و V_2 زیرفضای $P_2[\mathbb{R}]$ نیست.

مثال:

در فضای برداری $V = M_{n \times n}(\mathbb{R})$ مجموعه ماتریس‌هایی که با ماتریس $B_{n \times n}$ جابه‌جا می‌شوند یک زیرفضای برداری است:

$$W = \{A \in V \mid AB = BA\}$$

برای اثبات زیرفضا بودن W فرض کنیم $A_l, A_r \in V$ و $C \in \mathbb{R}$ در این صورت:

$$(cA_l + A_r)B = cA_l B + A_r B = cBA_l + BA_r = B(cA_l + A_r) \Rightarrow cA_l + A_r \in W$$

فضای جواب دستگاه همگن

دستگاه معادلات خطی همگن با m معادله n مجهول و ماتریس ضرایب $A_{m \times n}$ را در نظر بگیرید.

مجموعه جواب‌های این دستگاه یک زیرفضای $\mathbb{R}^n$ است.

$$W = \{X \in \mathbb{R}^n \mid AX = 0\}$$

زیرفضای ماتریس‌های متقارن و پادمتقارن

فضای برداری، ماتریس‌های 2×2 با درایه‌های حقیقی را در نظر بگیرید. مجموعه ماتریس‌های 2×2 متقارن یک زیرفضای V است. همچنین مجموعه ماتریس‌های 2×2 پادمتقارن نیز یک زیرفضای V است.

$$V = M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

$$W_l = \{A \in V \mid A^T = A\} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \mid a, b, d \in \mathbb{R} \right\} \leq V$$

$$W_r = \{A \in V \mid A^T = -A\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\} \leq V$$

اشتراک این دو زیرفضا فقط شامل ماتریس صفر است.

مثال:

چه تعداد از این مجموعه‌ها زیرفضایی از فضای برداری $\mathbb{R}^2$ روی میدان $\mathbb{R}$ هستند؟

- | | |
|---|-------|
| $V_l = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ | ۱ (۱) |
| $V_r = \{(2x, x) \mid x \in \mathbb{Z}\}$ | ۲ (۲) |
| $V_r = \{(2x, 2+x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ | ۳ (۳) |
| $V_r = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y = x \}$ | ۴ (۴) |

پاسخ: گزینه ۱

زیر فضاهای $\mathbb{R}^2$ عبارتند از: تک عضوی $\{(0,0)\}$ ، خطوطی که از مبدأ می‌گذرند، و خود $\mathbb{R}^2$.
 V_1 خطی گذرنده از مبدأ است پس زیرفضای $\mathbb{R}^2$ است اما سایر مجموعه‌ها زیرفضا نیستند. مجموعه V_4 فقط نقاط با مختصات صحیح دارد پس نسبت به ضرب اسکالر بسته نیست برای مثال $(2,1) \in V_4$ اما $\frac{1}{4}(2,1) = (1, 0.5) \notin V_4$. مجموعه V_3 شامل $(0,0)$ نیست پس زیرفضا نیست. مجموعه V_5 قرینه اعضایش را ندارد مثلاً $(1,1) \in V_5$ اما $(-1,-1) \notin V_5$.

فضای ماتریس‌های مختلط

فرض کنیم $M_n(\mathbb{C})$ مجموعه ماتریس‌های $n \times n$ با درایه‌های مختلط باشد.

$M_n(\mathbb{C})$ یک فضای برداری روی میدان اعداد مختلط است.

$M_n(\mathbb{C})$ یک فضای برداری روی میدان اعداد حقیقی است.

ماتریس‌های هرمیتی

ماتریس $A \in M_n(\mathbb{C})$ را هرمیتی (خودالحاق) گوئیم هرگاه $A^T = \bar{A}$ یعنی درایه‌ها در $a_{ji} = \bar{a}_{ij}$ صدق کنند. در ماتریس هرمیتی درایه‌های نیمه بالایی و پایینی مزدوج یکدیگرند و روی قطر اصلی a_{ii} با مزدوج خودش برابر است یعنی عناصر قطر اصلی اعداد حقیقی هستند. ماتریس هرمیتی 2×2 به این فرم است:

$$A = \begin{bmatrix} a & x+iy \\ x-iy & b \end{bmatrix}, a, b, x, y \in \mathbb{R}$$

فرض کنیم $\mathbb{H}$ مجموعه ماتریس‌های هرمیتی در $M_n(\mathbb{C})$ باشد.

$$\mathbb{H} = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A^T = \bar{A}\}$$

نکته: مجموعه $\mathbb{H}$ زیرفضایی از فضای برداری $M_n(\mathbb{C})$ روی میدان $\mathbb{R}$ است.

نکته: مجموعه $\mathbb{H}$ زیرفضایی از فضای برداری $M_n(\mathbb{C})$ روی میدان $\mathbb{C}$ نیست.

توضیح: اگر $A \in \mathbb{H}$ هرمیتی باشد، برای هر اسکالر حقیقی c ماتریس cA نیز هرمیتی است. اما برای هر اسکالر مختلط $a+ib \in \mathbb{C}$ ماتریس $(a+ib)A$ هرمیتی نیست.

اعمال جبری روی زیرفضاها

قضیه: فرض کنیم W_1 و W_2 دو زیرفضا از فضای برداری V باشند.

الف: $W_1 \cap W_2$ زیرفضای V است. (اشتراک هر تعداد زیرفضا، زیرفضاست).

ب: $W_1 \cup W_2$ زیرفضای V نیست مگر آنکه $W_1 \subseteq W_2$ یا $W_2 \subseteq W_1$ باشد.

ج: $W_1 + W_2$ زیرفضای V است. (مجموع هر تعداد متناهی از زیرفضاها، زیرفضاست).

مجموع دو زیرفضا به این صورت تعریف می‌شود:

$$W_1 + W_2 = \{\alpha + \beta \mid \alpha \in W_1, \beta \in W_2\}$$

مثال:

در فضای $\mathbb{R}^2$ فرض کنیم:

$$W_1 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$W_2 = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

در این صورت: یک عضو دلخواه W_1 به فرم $\alpha = (x, 0)$ و یک عضو دلخواه W_2 به فرم $\beta = (t, t)$ است.

$$W_1 + W_2 = \{\alpha + \beta \mid \alpha \in W_1, \beta \in W_2\}$$

$$= \{(x, 0) + (t, t) \mid x, t \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{(x + t, t) \mid x, t \in \mathbb{R}\}$$

$W_1 + W_2$ با فضای $\mathbb{R}^2$ برابر است زیرا برای هر جفت (a, b) دستگاه $\begin{cases} x + t = a \\ t = b \end{cases}$ دارای جواب است.

$$W_1 + W_2 = \mathbb{R}^2$$

جمع مستقیم زیرفضاها (direct sum)

طبق تعریف، هر بردار $x \in W_1 + W_2$ را می‌توان به صورت $x = \alpha + \beta$ نوشت که $\alpha \in W_1$ و $\beta \in W_2$. گاهی اوقات این کار فقط به یک صورت ممکن است یعنی فقط یک $\alpha \in W_1$ و فقط یک $\beta \in W_2$ می‌توان یافت که مجموع آنها برابر با x باشد. در این صورت می‌گوییم جمع این زیرفضاها از نوع جمع مستقیم است و آن را با علامت $W_1 \oplus W_2$ نشان می‌دهیم.

تشخیص جمع مستقیم

جمع دو زیرفضا از نوع جمع مستقیم است اگر و تنها اگر اشتراک آنها $\{0\}$ باشد.

$$W_1 \cap W_2 = \{0\} \Leftrightarrow W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2$$

توضیح مختصر:

فرض کنیم اشتراک زیرفضاها فقط شامل بردار صفر باشد. حال اگر بردار $x \in W_1 + W_2$ به دو صورت به مجموع $\alpha \in W_1$ و $\beta \in W_2$ تبدیل شود خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \alpha_1, \alpha_2 \in W_1 \quad \beta_1, \beta_2 \in W_2 \quad x = \alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2 \\ \Rightarrow \alpha_1 - \alpha_2 = \beta_2 - \beta_1 \end{aligned}$$

اما هر زیرفضا نسبت به جمع و تفریق بسته است پس: $\alpha_1 - \alpha_2 \in W_1$ و $\beta_2 - \beta_1 \in W_2$ در نتیجه $\alpha_1 - \alpha_2$ و $\beta_2 - \beta_1$ در اشتراک زیرفضاها قرار دارند. طبق فرض $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ پس:

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 0, \beta_2 - \beta_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2, \beta_1 = \beta_2.$$

یعنی هر بردار $x \in W_1 + W_2$ به صورت یکتایی تجزیه می‌شود و جمع، از نوع مستقیم است.

از سوی دیگر، وقتی α در اشتراک قرار داشته باشد آن را به شکل‌های $\alpha + 0$ و $0 + \alpha$ می‌توان تجزیه کرد. اگر قرار است تجزیه یکتا باشد باید $\alpha = 0$ باشد.

مثال:

$$W_1 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$W_2 = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

به وضوح $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^2$. همچنین $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ پس جمع آنها از نوع جمع مستقیم است.

اگر دقت کنید هر بردار $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ فقط به یک صورت در $W_1 + W_2$ نوشته می‌شود. مثلاً بردار $(3, 5)$ فقط به صورت $(3, 5) = (3, 0) + (0, 5)$ در $W_1 + W_2$ نوشته می‌شود.

مثال: در فضای $\mathbb{R}^3$ حاصل جمع این دو زیرفضا چیست؟ آیا جمع آنها از نوع جمع مستقیم است؟

$$W_1 = \{(a, a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$W_2 = \{(a, b, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

پاسخ:

نشان می‌دهیم مجموع آنها با $\mathbb{R}^3$ برابر است. اما به دو طریق نشان می‌دهیم که جمع آنها جمع مستقیم نیست. یک عضو دلخواه W_1 به فرم $\alpha = (a, a, b)$ و یک عضو دلخواه W_2 به فرم $\beta = (x, t, t)$ است.

$$\alpha + \beta = (a, a, b) + (x, t, t) = (a + x, a + t, b + t)$$

هر بردار عضو $\mathbb{R}^3$ را می‌توان به چند حالت به صورت مجموع این بردارها نوشت مثلاً بردار $(5, 6, 2)$ را در نظر بگیرید:

$$(a, a, b) + (x, t, t) = (a + x, a + t, b + t)$$

$$(1, 1, -3) + (4, 5, 5) = (5, 6, 2)$$

$$(2, 2, -2) + (3, 4, 4) = (5, 6, 2)$$

پس جمع زیرفضاها، جمع مستقیم نیست.

راه دوم و ساده‌تر، توجه به اشتراک است. در W_1 مولفه‌های اول و دوم برابرند. در W_2 مولفه‌های دوم و سوم برابرند. پس در $W_1 \cap W_2$ هر سه مولفه باید برابر باشند یعنی:

$$W_1 \cap W_2 = \{(x, y, z) \mid x = y = z\} = \{(a, a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

$W_1 \cap W_2$ تک عضوی صفر نیست پس جمع آنها جمع مستقیم نیست.

مثال: در فضای $\mathbb{R}^3$ مجموع این دو زیرفضا چیست؟ آیا جمع آنها جمع مستقیم است؟

$$W_1 = \{(a, b, a + b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$W_2 = \{(a, a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

پاسخ:

نشان می‌دهیم $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^3$ یعنی جمع آنها جمع مستقیم است و برابر با $\mathbb{R}^3$ است. عضو دلخواه W_1 به فرم $\alpha = (a, b, a + b)$ است و عضو دلخواه W_2 به فرم $\beta = (t, t, t)$ است.

$$\alpha + \beta = (a, b, a + b) + (t, t, t) = (a + t, b + t, a + b + t)$$

هر عضو $\mathbb{R}^3$ را می‌توان به این صورت نوشت زیرا مقادیر سمت راست هر چه که باشد دستگاه زیر دارای جواب است:

$$\begin{cases} a + t = ? \\ b + t = ? \\ a + b + t = ? \end{cases}$$

به سادگی دیده می‌شود که $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ پس: $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^3$.

زیرفضای ماتریسهای متقارن، پادمتقارن

فضای برداری، ماتریس‌های $n \times n$ با درایه‌های حقیقی را در نظر بگیرید. مجموعه ماتریس‌های متقارن یک زیرفضای V است. همچنین مجموعه ماتریس‌های پادمتقارن نیز یک زیرفضای V است.

$$V = M_n(\mathbb{R})$$

$$W_1 = \{A \in V \mid A^T = A\}$$

$$W_2 = \{A \in V \mid A^T = -A\}$$

اشتراک آنها فقط شامل ماتریس صفر است. مجموع آنها برابر با کل فضای $M_n(\mathbb{R})$ است. در نتیجه:

$$W_1 \oplus W_2 = M_n(\mathbb{R})$$

برای توضیح بیشتر فضای برداری، ماتریس‌های 2×2 با درایه‌های حقیقی را در نظر بگیرید. متقارن‌ها و پادمتقارن‌ها هر کدام یک زیرفضای آن هستند.

$$V = M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

$$W_1 = \{A \in V \mid A^T = A\} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \mid a, b, d \in \mathbb{R} \right\} \leq V$$

$$W_2 = \{A \in V \mid A^T = -A\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\} \leq V$$

تنها ماتریسی که هم متقارن و هم پادمتقارن ماتریس صفر است:

$$W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

توجه کنید که هر ماتریس مربع مجموع یک ماتریس متقارن و یک ماتریس پادمتقارن است:

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T) \in W_1 \oplus W_2$$

زیرفضای چندجمله‌ای‌های زوج، فرد

فضای برداری $V = P_n[\mathbb{R}]$ (چندجمله‌ای‌های حداکثر درجه n با ضرایب حقیقی) را در نظر بگیرید.

$P_n[\mathbb{R}]$ دو زیرفضای معروف دارد: چندجمله‌ای‌های زوج (W_1) و چندجمله‌ای‌های فرد (W_2):

$$W_1 = \{f \in P_n[\mathbb{R}] \mid f(-x) = f(x)\}$$

$$W_2 = \{f \in P_n[\mathbb{R}] \mid f(-x) = -f(x)\}$$

[دقت کنید که منظورمان چندجمله‌ای‌های درجه زوج، و درجه فرد نیست. بلکه باید تمام جملات توان

زوج داشته باشند تا یک چندجمله‌ای زوج باشد.]

اشتراک آنها $\{0\} = W_1 \cap W_2$ است. تنها تابعی که هم زوج است هم فرد، تابع ثابت صفر است.

توجه کنید که هر تابع را می‌توان به صورت مجموعی از یک تابع زوج و یک تابع فرد نوشت:

$$f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \in W_1 \oplus W_2$$

پس مجموع مستقیم آنها برابر با $V = P_n[\mathbb{R}]$ است:

$$W_1 \oplus W_2 = P_n(\mathbb{R})$$

دقت کنید: در این مثال نیز $W_1 \cup W_2$ زیرفضا نیست چون نسبت به جمع بسته نیست. $x^2 \in W_1$ زوج

است و $x^2 \in W_2$ فرد است. پس اما $x^2 + x^2 = 2x^2$ نه زوج است و نه فرد است پس در اجتماع آنها قرار ندارد.

متمم جبری

در فضای برداری V زیرفضاهای W_1 و W_2 را متمم جبری (یا مکمل جبری) یکدیگر می‌نامیم هرگاه جمع مستقیم آنها برابر با V باشد. به عبارتی جمع آنها کل فضا و اشتراک آنها $\{0\}$ باشد:

$$W_1 \oplus W_2 = V, \quad W_1 \cap W_2 = \{0\}$$

متمم جبری W را گاه با علامت W' نشان‌دهیم.

مثال:

در فضای ماتریس‌های $n \times n$ ، مجموعه ماتریس‌های متقارن و مجموعه ماتریس‌های پادمتقارن متمم جبری یکدیگرند.

مثال:

در فضای چندجمله‌ای‌های حداکثر درجه n زیرفضای چندجمله‌ای‌های زوج و زیرفضای چندجمله‌ای‌های فرد، متمم جبری یکدیگرند.

مثال:

این زیرفضاها در $\mathbb{R}^3$ متمم جبری یکدیگرند:

$$W_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = 0\}$$

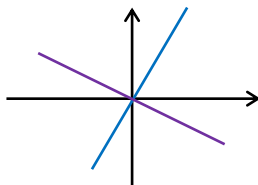
$$W_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_2 = x_3 = 0\}$$

مشابه همین نکته در فضاها با ابعاد بیشتر نیز برقرار است.

مثال: در فضای $\mathbb{R}^2$ متمم جبری $W_1 = \{(x, y) \mid y = 2x\}$ را بیابید.

پاسخ:

W_1 خطی است که از مبدأ می‌گذرد. هر خط دیگری به جز W_1 که از مبدأ بگذرد، متمم جبری W_1 است. در فضای $\mathbb{R}^2$ هر جفت از خطوط که از مبدأ بگذرند و بر هم منطبق نباشند متمم جبری هم هستند. هر کدام از آنها زیرفضایی یک بعدی هستند و اشتراک آنها فقط در بردار صفر است پس جمع آنها جمع مستقیم است. جمع مستقیم دو زیرفضای یک بعدی، یک فضای دو بعدی است. پس مجموع آنها با $\mathbb{R}^2$ برابر است. (با مفهوم بُعد در ادامه آشنا می‌شوید).



نتیجه: در حالت کلی متمم جبری زیرفضای W یکتا نیست.

توجه: در فضای برداری V متمم جبری V زیرفضای $\{0\}$ است.

مجموع مستقیم چند زیرفضا

مجموع زیرفضاهای $W_1, W_2, \dots, W_n \leq V$ به این شکل تعریف می‌شود:

$$W_1 + W_2 + \dots + W_n = \{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \mid \alpha_1 \in W_1, \alpha_2 \in W_2, \dots, \alpha_n \in W_n\}$$

و جمع آنها از نوع مستقیم است اگر و تنها اگر برای هر k :

$$W_k \cap \left\langle \bigcup_{i \neq k} W_i \right\rangle = \{0\}$$

به عبارت دیگر، جمع چند زیرفضا به شرطی جمع مستقیم است که اشتراک هر کدام با مجموع سایرین، بردار صفر باشد:

$$W_k \cap \sum_{i \neq k} W_i = \{0\}$$

استقلال و وابستگی خطی

تعریف:

بردارهای $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ مستقل خطی هستند هرگاه از تساوی $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_n\alpha_n = 0$ بتوان نتیجه گرفت: $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$.

تعریف:

بردارهای $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ وابسته خطی هستند هرگاه مستقل خطی نباشند.

تعریف:

می‌گوییم بردار β ترکیب خطی بردارهای $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ است هرگاه اسکالرهایی $c_1, c_2, \dots, c_n$ موجود باشند طوری که: $\beta = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_n\alpha_n$.

چند نکته:

- مجموعه تهی مستقل خطی است.
- هر مجموعه از بردارها که شامل بردار صفر باشد، وابسته خطی است.
- مجموعه $\{v_1\}$ مستقل خطی است اگر و تنها اگر $v_1 \neq 0$.
- مجموعه $\{v_1, v_2\}$ مستقل خطی است اگر و تنها اگر هیچکدام مضرب دیگری نباشند.
- مجموعه $\{v_1, v_2, v_3\}$ مستقل خطی است اگر و تنها اگر هیچکدام بردار صفر نباشند، v_2 مضرب v_1 نباشد، v_3 ترکیب خطی v_1 و v_2 نباشد.

تشخیص استقلال یا وابستگی خطی در حالت کلی

دو راه برای تشخیص استقلال یا وابستگی بردارهای $v_1, v_2, \dots, v_n$ داریم.

راه اول استفاده از تعریف، حل معادله $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = 0$ و تشکیل دستگاه معادلات خطی همگن. اگر جواب این دستگاه فقط صفر باشد، بردارها مستقل خطی هستند.

راه دوم تشکیل ماتریسی که سطرها یا ستون‌های آن نشان دهنده بردارهای $v_1, v_2, \dots, v_n$ هستند. رتبه این ماتریس، نشان می‌دهد که چه تعداد از این بردارها مستقل خطی هستند. اگر رتبه ماتریس n باشد، این مجموعه از بردارها مستقل خطی است.

مثال: آیا بردارهای $\{v_1 = (1, 2, 0), v_2 = (2, 6, 0)\}$ در $\mathbb{R}^3$ مستقل خطی‌اند؟

پاسخ:

از آنجا که $v_2 = 3v_1$ پس این بردارها وابسته خطی‌اند.

در واقع $3v_1 - v_2 = 0$ پس یک ترکیب خطی از این بردارها صفر می‌شود بدون آنکه ضرایب همه صفر باشند. به همین دلیل وابسته خطی‌اند.

مثال: آیا بردارهای $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ در $\mathbb{R}^2$ مستقل خطی‌اند؟

پاسخ: روش اول:

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0 \Rightarrow c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + 2c_3 = 0 \\ c_1 + 2c_2 + 5c_3 = 0 \end{cases}$$

تعداد مجهولات از معادلات بیشتر است پس دستگاه به جز جواب بدیهی $c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 0$ بی‌شمار جواب دیگر نیز دارد. پس بردارهای $\{v_1, v_2, v_3\}$ وابسته خطی هستند.

روش دوم: ماتریس حاصل از این بردارها را بررسی کنیم:

$$A = [v_1 \ v_2 \ v_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank } A = 2$$

رتبه A برابر با ۲ است پس $\{v_1, v_2, v_3\}$ مجموعه‌ای مستقل خطی از بردارها نیست. البته این مجموعه شامل ۲ بردار مستقل است.

مثال: آیا بردارهای $v_1 = (1, 2, 1, -1)$, $v_2 = (2, 0, 2, -1)$, $v_3 = (0, -4, 0, 1)$ در $\mathbb{R}^4$ مستقل خطی‌اند؟

پاسخ:

روش اول:

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} c_1 + 2c_2 = 0 \\ 2c_1 - 4c_2 = 0 \\ c_1 + 2c_2 = 0 \\ -c_1 - c_2 + c_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

پس این بردارها مستقل خطی هستند.

روش دوم:

$$A = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A شامل زیرماتریس 3×3 با دترمینان غیرصفر است پس رتبه A برابر با ۳ است، پس بردارهای v_1, v_2, v_3 مستقل خطی هستند.

مثال: استقلال یا وابستگی خطی مجموعه A را در فضای برداری $V = M_2(\mathbb{R})$ بررسی کنید.

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

پاسخ:

روش اول:

فرض کنیم

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 0$$

با حل دستگاه می‌بینیم که تنها جواب ممکن جواب بدیهی $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$ نیست و دستگاه بی‌شمار جواب دارد برای مثال $c_1 = 1, c_2 = -1, c_3 = 0, c_4 = -1$ یکی از جوابهاست. پس A مجموعه‌ای مستقل خطی نیست.

روش دوم:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \approx (a, b, c, d) \quad \text{هر ماتریس } \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ نظیر بردار } (a, b, c, d) \text{ است:}$$

با استفاده از این تکنیک، هر ماتریس 2×2 را به عنوان یک سطر از ماتریس M می‌نویسیم سپس رتبه M تعداد ماتریس‌های مستقل خطی در مجموعه A را نشان می‌دهد.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

عملیات حذف را انجام دهیم:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} R_3 \leftarrow R_3 - R_1 \\ R_4 \leftarrow R_4 - R_1 \end{smallmatrix}]{R_2 \leftarrow R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} R_4 \leftarrow R_4 + R_2 \end{smallmatrix}]{R_3 \leftarrow R_3 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

رتبه M برابر با ۳ است پس مجموعه ۴ عضوی A مستقل خطی نیست، وابسته خطی است. البته A زیرمجموعه‌ای ۳ عضوی و مستقل خطی دارد.

مثال:

در فضای برداری $V = P_2(\mathbb{R})$ استقلال یا وابستگی خطی مجموعه‌های A و B را بررسی کنید.

$$A = \{(x+1)^2, (1+x), (1-x)\}$$

$$B = \{x^2 + 1, x^2 + x, 1 - x\}$$

پاسخ:

هر چند جمله‌ای $ax^2 + bx + c$ نظیر بردار (a, b, c) است. ماتریس حاصل از این بردارها را تشکیل دهیم.

بررسی A : $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ پس مجموعه A نظیر این ماتریس است:

$$A = \{x^2 + 2x + 1, 1 + x, 1 - x\} \Rightarrow M_A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

دترمینان M_A مخالف صفر است پس رتبه آن برابر با ۳ است پس مجموعه A مستقل خطی است.

بررسی B :

$$B = \{x^2 + 1, x^2 + x, 1 - x\} \Rightarrow M_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

دترمینان M_B صفر است پس مجموعه B وابسته خطی است. رتبه این ماتریس ۲ است پس B شامل دو چند جمله‌ای مستقل خطی است.

مثال: (علوم ریاضی ۱۳۹۹)

بردارهای زیر را در $\mathbb{R}^3$ در نظر بگیرید. مقدار k چند باشد تا w ترکیب خطی بردارهای u و v باشد؟

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} k \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(2) ۳

(1) -۲

(4) -۴

(3) ۵

پاسخ: گزینه ۴

اگر w ترکیب خطی بردارهای u و v باشد این سه بردار وابسته خطی اند پس دترمینان ماتریس مربعی که با آنها ساخته می‌شود صفر است.

$$\det \begin{bmatrix} 1 & -1 & k \\ -2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} = -11k - 44 = 0 \Rightarrow k = -4$$

زیرفضای تولید شده توسط S

فرض کنیم S زیرمجموعه‌ای ناتهی از فضای برداری V باشد. زیرفضای تولید شده توسط S برابر است با مجموعه همه ترکیبهای خطی اعضای S . این زیرفضا را با علامت $\langle S \rangle$ نشان می‌دهیم. این زیرفضا کوچکترین زیرفضای شامل S است. عبارات زیر همه به زیرفضای $\langle S \rangle$ اشاره می‌کنند.

- مجموعه تمام ترکیبات خطی اعضای S .
- زیرفضای تولید شده توسط S .
- کوچکترین زیرفضای شامل S .
- اشتراک همه زیرفضاهای شامل S .
- $\langle S \rangle = \text{LinearSpan}(S)$.

$$\left\{ \sum_{i=1}^n c_i X_i \mid n \in \mathbb{N}, c_i \in F, X_i \in S, 1 \leq i \leq n \right\} \quad -$$

مولدهای فضای برداری

می‌گوییم S مولد فضای V است هرگاه: $\langle S \rangle = V$.

یک مولد بدیهی فضای V خود V است: $\langle V \rangle = V$ اما مولدهایی اهمیت دارند که با تعداد کمی از بردارها بتوانند همه بردارهای دیگر را تولید کنند.

مثال:

در فضای برداری $V = \mathbb{R}^2$ به این مجموعه توجه کنید:

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

هر بردار $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ توسط بردارهای عضو A تولید می‌شود. آن‌هم به چند صورت!

مثلاً:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

یا:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (x - y) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

یا:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} - x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (y - 3x) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

پس مجموعه چهارعضوی A یک مولد برای فضای $\mathbb{R}^2$ است.

به دو نکته دربارهٔ این مولد دقت کنید:

الف: A یک مولد مینیمال نیست. اگر بردارهای $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ را حذف کنیم باز هم بردارهای $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

می‌توانند فضای $\mathbb{R}^2$ را تولید کنند.

ب: مجموعه A هر بردار $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ را به چند صورت تولید می‌کند نه به صورت یکتا.

توجه کنید: با حذف بردارهای غیرضروری A به مجموعه دو عضوی $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ می‌رسیم که دو

ویژگی دارد:

اول: هر بردار $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ به شکل یکتایی توسط آن تولید می‌شود: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

دوم: B مولد مینیمال است. هیچکدام از بردارهای $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ به تنهایی نمی‌تواند $\mathbb{R}^2$ را تولید کند.

سوم: برخلاف A که اعضایش وابسته خطی هستند، اعضای B مستقل خطی هستند. به مولدهایی مانند B پایه فضا گفته می‌شود. به تعریف توجه کنید:

پایه فضای برداری

زیرمجموعه B را یک پایه (Base) برای فضای برداری V می‌نامیم هرگاه مستقل خطی باشد و مولد V باشد.

- هر پایه فضای برداری V ، یک زیرمجموعه مستقل خطی است که مولد فضا نیز هست.

قضیه:

- هر مجموعه مولد V که تعداد اعضایش کمترین تعداد ممکن باشد، یک پایه برای V است.
- به عبارتی: هر مولد می‌نیمال، یک پایه برای فضای V است.
- هر مجموعه مستقل خطی که تعداد اعضایش بیشترین تعداد ممکن باشد، یک پایه برای V است.
- به عبارتی: هر مجموعه مستقل خطی ماکسیمال، یک پایه برای فضای V است.

قضیه:

- هر فضای برداری $V \neq \{0\}$ ، دارای پایه است.
- در حالت کلی، پایه فضای برداری منحصر به فرد نیست. برای مثال هر زیرمجموعه دو عضوی از فضای برداری $\mathbb{R}^2$ که از دو بردار مستقل تشکیل شده باشد، یک پایه برای $\mathbb{R}^2$ است.

بعد فضای برداری

فرض کنیم V فضای برداری دلخواهی روی میدان F باشد. همه پایه های فضای برداری V کاردینال یکسان دارند. اگر یکی از پایه‌ها n عضوی باشد، همه پایه‌ها n عضوی خواهند بود.

تعداد اعضای پایه را بعد فضای برداری می‌نامیم و با $\dim V$ نشان می‌دهیم.

به طور خلاصه، اگر B_1 و B_2 دو پایه برای V باشند داریم:

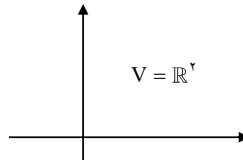
$$\dim V = |B_1| = |B_2|$$

مثال: در فضای برداری $V = \mathbb{R}^2$ این زیرمجموعه‌ها را بررسی کنید. کدام مولد فضا است؟ کدام مستقل خطی است؟ کدام پایه‌ای برای فضا است؟

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \quad B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$C = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$D = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad E = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$$



مجموعه A: مستقل خطی است. اما مولد $\mathbb{R}^2$ نیست. زیرفضای تولید شده توسط A خط $y = 2x$ است.

مجموعه B: مستقل خطی است و مولد $\mathbb{R}^2$ است پس یک پایه $\mathbb{R}^2$ است. در واقع B معروف‌ترین پایه $\mathbb{R}^2$

است. B هر بردار $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ را به صورت یکتایی تولید می‌کند:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

مجموعه C: رتبه ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ برابر با ۲ است. پس این مجموعه سه عضوی، مستقل خطی نیست،

اما یک فضای ۲ بعدی را تولید می‌کند. (در واقع بردار $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ مجموع دو بردار دیگر است پس مستقل خطی

نیستند.) پس C مولد فضا هست اما پایه نیست. وقتی مجموعه‌ای مولد باشد اما پایه نباشد، هر بردار را به

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

چند روش تولید می‌کند. مثلاً برای بردار $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

مجموعه D: رتبه $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ برابر ۲ است پس مجموعه ۲ عضوی D مستقل خطی است و فضای ۲ بعدی $\mathbb{R}^2$ را

تولید می‌کند به بیان دیگر، دستگاه $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ برای هر بردار $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ جواب یکتا دارد. D پایه

ای برای $\mathbb{R}^2$ است.

مجموعه E: با آنکه این مجموعه دو عضوی است اما بردارهایش مستقل خطی نیستند، یکی از آنها مضرب

دیگری است. پس زیرفضای تولید شده توسط E یک زیرفضای یک‌بعدی است پس E مولد $\mathbb{R}^2$ نیست.

پایه‌های استاندارد

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{پایه استاندارد } \mathbb{R}^3:$$

$$e_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, e_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, e_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, e_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{پایه استاندارد } M_{2 \times 2}(\mathbb{R}):$$

$$1, x, x^2, x^3 \quad \text{پایه استاندارد } P_4(\mathbb{R}):$$

به طور کلی:

- پایه استاندارد $\mathbb{R}^n$ مجموعه $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ است و $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$.
- یعنی $\mathbb{R}^n$ یک فضای برداری n بعدی روی میدان $\mathbb{R}$ است.
- به طور کلی F^n یک فضای برداری n بعدی روی میدان F است.
- پایه استاندارد $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ مجموعه $\{e_{11}, e_{12}, \dots, e_{mn}\}$ است و $\dim_{\mathbb{R}} M_{m \times n}(\mathbb{R}) = mn$.
- پایه استاندارد $P_n(\mathbb{R})$ مجموعه $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ است و $\dim_{\mathbb{R}} P_n(\mathbb{R}) = n + 1$.

مثال: در فضای برداری $V = \mathbb{R}^4$ بعد زیر فضای W را بیابید. یک پایه برای آن بنویسید.

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_2 + x_3 + x_4 = 0, x_2 = 2x_1\}$$

پاسخ:

روش اول: W زیر فضای یک فضای چهاربعده است. از طرفی دارای دو شرط خطی همگن است یعنی معادلات $x_2 = 2x_1$ و $x_2 + x_3 + x_4 = 0$ باید برقرار باشند. این معادلات، مستقل از یکدیگرند پس هر کدام از آنها یک بعد از فضا کم می‌کند: $\dim W = 4 - 1 - 1 = 2$

روش دوم: به شکل اعضای W توجه کنیم:

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3, x_4) \in W &\Leftrightarrow x_2 = 2x_1 \text{ and } x_4 = -x_2 - x_3 \\ &\Leftrightarrow x_2 = 2x_1 \text{ and } x_4 = -2x_1 - x_3 \end{aligned}$$

بنابراین اعضای W به این فرم هستند:

$$W = \{(x_1, 2x_1, x_3, -2x_1 - x_3) \mid x_1, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

این بردارها ترکیب خطی دو بردار زیر هستند:

$$(x_1, 2x_1, x_3, -2x_1 - x_3) = x_1(1, 2, 0, -2) + x_3(0, 0, 1, -1)$$

بردارهای $\{(1, 2, 0, -2), (0, 0, 1, -1)\}$ مستقل خطی هستند پس یک پایه برای W تشکیل می‌دهند.

مثال:

در فضای برداری $V = M_2(\mathbb{R})$ ماتریس $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $W \leq V$ زیرفضای ماتریس‌هایی باشد که با B جابه‌جا می‌شوند. $\dim W$ چند است؟ یک پایه برای W بیابید.

$$W = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid AB = BA\}$$

پاسخ:

W در یک فضای برداری چهار بعدی قرار دارد. یک راه آن است که ببینیم معادله $AB = BA$ باعث ایجاد چند محدودیت مستقل روی درایه‌ها می‌شود. به ازای هر محدودیت یک بعد از فضا کم می‌شود. راه دیگر آن است که با استفاده از این معادله، شکل اعضای W را پیدا کنیم و یک پایه برای آن به دست آوریم.

$$\begin{aligned} A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in W &\Leftrightarrow AB = BA \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x & y \\ 2z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ z & w \end{bmatrix} \Leftrightarrow y = 0, z = 0 \end{aligned}$$

بنابراین W زیرفضایی دو بعدی است:

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & w \end{bmatrix} \mid x, w \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & w \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

پس مجموعه دو عضوی $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ پایه W است.

بعد مجموع زیرفضاها

هرگاه W_1 و W_2 زیرفضای V باشند داریم:

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

در حالت خاص اگر جمع آنها از نوع جمع مستقیم باشد:

$$\dim(W_1 \oplus W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$$

زیرا در جمع مستقیم، اشتراک زیرفضاها $\{0\}$ است.

مثال: فرض کنیم W_1 و W_2 زیرفضاهای $\mathbb{R}^3$ هستند که به این صورت تعریف شده‌اند:

$$W_1 = \{(a, b, c) \mid a = b = c\}$$

$$W_2 = \{(a, b, c) \mid a + b + c = 0\}$$

در این صورت $\dim(W_1 + W_2)$ کدام است؟

۲ (2)

۴ (4)

۱ (1)

۳ (3)

پاسخ:

W_1 و W_2 زیرفضای فضای سه بعدی $\mathbb{R}^3$ هستند در W_1 دو معادله همگن داریم: $a = b$ و $b = c$ پس:

$$\dim W_1 = 3 - 1 - 1 = 1$$

در W_2 یک معادله همگن داریم: $a + b + c = 0$ پس:

$$\dim W_2 = 3 - 1 = 2$$

اگر بردار (a, b, c) عضو $W_1 \cap W_2$ باشد باید $a = b = c$ و $a + b + c = 0$ در نتیجه: $a = 0, b = 0, c = 0$ پس اشتراک آنها صفر بعدی است.

$$W_1 \cap W_2 = \{0\} \Rightarrow \dim W_1 \cap W_2 = 0$$

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2) = 1 + 2 - 0 = 3$$

مثال: فرض کنیم U و W زیرفضاهایی متمایز ۴ بعدی از فضای برداری V باشند طوری که $\dim V = 6$

ابعاد ممکن برای زیرفضای $U \cap V$ کدامند؟ (دکتری ریاضی ۱۴۰۱)

(2) ۲ یا ۳

(1) ۱ یا ۲

(4) ۴

(3) ۳ یا ۴

پاسخ: گزینه ۲

U و W زیرفضاهایی متمایز ۴ بعدی هستند. $U \cap V$ حداکثر ۴ بعدی است. همچنین U و W متمایز هستند پس با هم برابر نیستند پس اشتراک آنها نمی‌تواند ۴ بعدی باشد. پس $\dim(U \cap W) \leq 3$.

$U + V$ زیرفضای V است پس $\dim(U + W) \leq 6$ از طرفی:

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = 8 - \dim(U \cap W)$$

بنابراین:

$$8 - \dim(U \cap W) \leq 6 \Rightarrow 2 \leq \dim(U \cap W)$$

در نتیجه: $2 \leq \dim(U \cap W) \leq 3$

پایه مرتب

فرض کنیم B پایه‌ای برای فضای n بعدی V باشد. اگر اعضای B را شماره‌گذاری کنیم به مجموعه $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n\}$ یک پایه مرتب برای V می‌گویند.

مثال:

بردارهای $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ یک پایه برای فضای $\mathbb{R}^2$ می‌سازند. آنها به دو شکل مرتب می‌شوند.

$$\{\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\} \quad \text{یا} \quad \{\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}$$

مختصات:

فرض کنیم $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n\}$ پایه‌ای مرتب برای فضای برداری V باشد. هر بردار $x \in V$ به شکل یکتایی توسط عناصر پایه تولید می‌شود. اسکالرهایی یکتای $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ وجود دارند که:

$$x = c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + c_3 \alpha_3 + \dots + c_n \alpha_n$$

این ضرایب را مختصات بردار x نسبت به پایه B می‌نامیم:

$$[x]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

مثال: مختصات بردار $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ را نسبت به پایه مرتب $B = \{\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\}$ بیابید؟

$$x = c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + 2c_2 = 1 \\ c_1 + 3c_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow c_1 = -1, c_2 = 1$$

مختصات بردار x نسبت به این پایه:

$$[x]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

مثال: بردارهای $u_1 = (1, -1, 0)$, $u_2 = (1, 1, 0)$, $u_3 = (0, 1, 1)$ یک پایه برای $\mathbb{R}^3$ تشکیل می‌دهند. مختصات

بردار $v = (5, 3, 4)$ نسبت به این پایه کدام است؟ (علوم کامپیوتر ۱۴۰۱)

$$[v] = [1 \ 2 \ 4] \quad (2) \qquad [v] = [3 \ 2 \ 4] \quad (1)$$

$$[v] = [2 \ 4 \ 5] \quad (4) \qquad [v] = [3 \ 1 \ 4] \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۱

فرض کنیم مختصات این بردار $[v] = [c_1 \ c_2 \ c_3]$ باشد:

$$v = c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 \Rightarrow (5, 3, 4) = c_1(1, -1, 0) + c_2(1, 1, 0) + c_3(0, 1, 1)$$

با امتحان گزینه‌ها می‌بینیم که $c_1 = 3$, $c_2 = 2$, $c_3 = 4$ در معادله صدق می‌کند.

مثال: فرض کنیم P_3 فضای تمام چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه ۳ با ضرایب حقیقی باشد و قرار دهید

$$W_1 = \{f(x) \in P_3 \mid f'(-1) = 0\} \text{ و } W_2 = \{f(x) \in P_3 \mid f''(1) = 0\}$$

$$W_1 + W_2 \neq P_3 \text{ و } \dim W_1 = \dim W_2 = 3 \quad (1)$$

$$W_1 + W_2 = P_3 \text{ و } \dim W_1 = 2 \text{ و } \dim W_2 = 3 \quad (2)$$

$$W_1 + W_2 = P_3 \text{ و } \dim W_1 = \dim W_2 = 3 \quad (3)$$

$$W_1 + W_2 \neq P_3 \text{ و } \dim W_1 = 2 \text{ و } \dim W_2 = 3 \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۳

روش اول: P_3 فضایی ۴ بُعدی است. W_1 یک شرط همگن به فرم $f'(-1) = 0$ دارد. این محدودیت، بُعد را

یک واحد کاهش می‌دهد. پس $\dim W_1 = 4 - 1 = 3$. زیرفضای W_2 نیز یک شرط همگن به فرم $f''(1) = 0$

دارد که بُعد را یک واحد کاهش می‌دهد. پس $\dim W_2 = 4 - 1 = 3$. این دو معادله همگن، مستقل از

یکدیگرند پس در $W_1 \cap W_2$ دو بعد از فضا کاسته می‌شود: $\dim W_1 \cap W_2 = 4 - 2 = 2$ در نتیجه:

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim W_1 \cap W_2 = 3 + 3 - 2 = 4$$

تنها زیرفضای ۴ بُعدی در P_3 خود P_3 است: $W_1 + W_2 = P_3$.

روش دوم، تشریح کامل: هر عضو P_3 به فرم $f(x) = ax^3 - 3ax^2 + cx + d$ است.

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

زیرفضاهای داده شده را دقیق‌تر بررسی می‌کنیم تا فرم اعضای آنها معلوم شود.

$$W_1 = \{f(x) \in P_3 \mid f'(-1) = 0\} = \{f(x) \in P_3 \mid 3a - 2b + c = 0\}$$

پس $c = 2b - 3a$ و اعضای W_1 ترکیب خطی سه چندجمله‌ای مستقل خطی هستند:

$$f(x) \in W_1 \Leftrightarrow f(x) = ax^3 + bx^2 + (2b - 3a)x + d = a(x^3 - 3x) + b(x^2 + 2x) + d$$

در نتیجه $\dim W_1 = 3$. بررسی W_2 :

$$W_2 = \{f(x) \in P_3 \mid f''(1) = 0\} = \{f(x) \in P_3 \mid 6a + 2b = 0\} = \{f(x) \in P_3 \mid b = -3a\}$$

پس اعضای W_2 ترکیب خطی از سه چندجمله‌ای مستقل خطی هستند:

$$f(x) \in W_2 \Leftrightarrow f(x) = ax^3 - 3ax^2 + cx + d = a(x^3 - 3x^2) + cx + d$$

پس $\dim W_2 = 3$.

در $W_1 \cap W_2$ هر دو شرط برقرار است یعنی $3a - 2b + c = 0$ و $b = -3a$. در نتیجه $c = -9a$.

اعضای $W_1 \cap W_2$ ترکیب خطی دو چندجمله‌ای مستقل خطی هستند:

$$f(x) \in W_1 \cap W_2 \Leftrightarrow f(x) = ax^3 - 3ax^2 - 9ax + d = a(x^3 - 3x^2 - 9x) + d$$

پس $\dim W_1 \cap W_2 = 2$. اکنون از قضیه اساسی استفاده کنیم، $\dim(W_1 + W_2) = 4$ پس $W_1 + W_2 = P_3$.

مثال: فرض کنیم $V = \mathbb{R}[x]$ فضای تمام چندجمله‌ای‌های با ضرایب حقیقی باشد. همچنین

$$P_{1394}(x) = \{f(x) \in V \mid \deg f(x) \leq 1394\}$$

چنانچه $W = \{f(x) \in P_{1394}(x) \mid f(2) = 0\}$. مقدار $\dim_{\mathbb{R}} W$ کدام است؟ (دکتری ریاضی ۱۳۹۵)

(2) ۱۳۹۳

(1) ۱۳۹۲

(4) ۱۳۹۵

(3) ۱۳۹۴

پاسخ: گزینه ۳

می‌دانیم $\dim P_{1394}(x) = 1395$. زیرفضای W یک شرط همگن به صورت $f(2) = 0$ دارد که بُعد آن را

یک واحد کاهش می‌دهد. پس $\dim W = 1394$.

بعد چند زیرفضاهای معروف در فضای برداری ماتریس‌های $n \times n$ روی میدان $\mathbb{R}$

$W = \{A : A^T = A\}$	$\dim_{\mathbb{R}} W = \frac{1}{2}(n^2 + n)$	ماتریس‌های متقارن
$K = \{A : A^T = -A\}$	$\dim_{\mathbb{R}} K = \frac{1}{2}(n^2 - n)$	ماتریس‌های پادمتقارن
$U = \{A : a_{ij} = 0 \text{ for } i > j\}$	$\dim_{\mathbb{R}} U = \frac{1}{2}(n^2 + n)$	ماتریس‌های بالامثلثی
$D = \{A : a_{ij} = 0 \text{ for } i \neq j\}$	$\dim_{\mathbb{R}} D = n$	ماتریس‌های قطری
$Z = \{A \in D : \text{tr } A = 0\}$	$\dim_{\mathbb{R}} Z = n - 1$	ماتریس‌های قطری با اثر صفر
$H = \{A : \text{tr } A = 0\}$	$\dim_{\mathbb{R}} H = n^2 - 1$	ماتریس‌های با اثر صفر

قضیه وجود پایه

هر فضای برداری غیرصفر، دارای پایه است.

قضیه گسترش

فرض کنید V فضای برداری n بعدی باشد. هر زیرمجموعه مستقل خطی $A \subseteq V$ را می‌توان با افزودن تعداد مناسبی بردار مستقل خطی، به یک پایه برای V تبدیل کرد. یعنی هر مجموعه مستقل خطی زیرمجموعه یک پایه است.

مثال:

در فضای برداری $\mathbb{R}^3$ مجموعه $A = \{(1, 2, 1), (2, 3, 1)\}$ یک زیرمجموعه دو عضوی مستقل خطی است، زیرفضایی که توسط A تولید می‌شود صفحه $y = x + z$ است. با انتخاب برداری که در این صفحه قرار نداشته نباشد و اضافه کردن آن به A می‌توان یک پایه برای فضای سه بعدی $\mathbb{R}^3$ ساخت. به بیان ساده‌تر بردارهای عضو A دو سطر مستقل خطی از یک ماتریس مربع هستند. اگر سطر سوم طوری انتخاب شود که دترمینان ماتریس صفر نشود، سطرهای ماتریس یک پایه برای $\mathbb{R}^3$ می‌سازند. مثلاً سطر سوم می‌تواند بردار $(0, 0, 1)$ باشد. مجموعه A قابل گسترش به پایه B است:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \neq 0 \Rightarrow A \subseteq B = \{(1, 2, 1), (2, 3, 1), (0, 0, 1)\}$$

قضیه کاهش (پالایش)

فرض کنید V فضای برداری n بعدی باشد. اگر A مولد فضای برداری باشد می‌توان با حذف عناصر غیرضروری از آن به یک پایه برای V رسید. یعنی هر مولد، شامل یک پایه است.

مثال:

در فضای برداری $\mathbb{R}^2$ مجموعه $A = \{(1, 2), (2, 4), (3, 1), (5, 5)\}$ را در نظر بگیرید. این مجموعه یک

مولد برای $\mathbb{R}^2$ است زیرا رتبه ماتریسی که با این بردارها ساخته می‌شود ۲ است. $\text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} = 2$ است. با انتخاب

یک زیرماتریس 2×2 که دترمینانش صفر نباشد می‌توان از بین اعضای A یک پایه $\mathbb{R}^2$ برای پیدا کرد. مثلاً دو سطر آخر مستقل خطی هستند. پس $B = \{(3, 1), (5, 5)\}$ یک پایه برای $\mathbb{R}^2$ است.

به دو مثال زیر و تفاوت آنها با هم توجه کنید.

مثال:

اگر $V = \{(a+3b+4c+2d, 2a+2b+4c, 2b+2c+2d, -b-c-d) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ آنگاه بعد زیرفضای V از $\mathbb{R}^4$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر ۱۳۹۸)

۴ (4) ۳ (3) ۲ (2) ۱ (1)

پاسخ:

هر بردار عضو V ترکیب خطی چهار بردار است:

$$(a+3b+4c+2d, 2a+2b+4c, 2b+2c+2d, -b-c-d) \\ = a(1, 2, 0, 0) + b(3, 2, 2, -1) + c(4, 4, 2, -1) + d(2, 0, 2, -1)$$

اگر این بردارها را به شکل ستونی یا سطری در یک ماتریس بنویسیم، بعد V برابر با رتبه ماتریس است.

(تاثیری بر رتبه ماتریس ندارد اما بهتر است که بردارها را ستونی بنویسیم).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

سطر چهارم مضرب سطر سوم است. ستون سوم مجموع دو ستون اول است. با حذف این سطر و ستون، رتبه ماتریس برابر با ۲ است پس:

$$\dim V = \text{rank } A = 2$$

مثال:

اگر $W = \{(a, b, c) \mid a + 2b = 0, a - b - c = 0, 2a + b - c = 0\}$ آنگاه بعد زیرفضای W از $\mathbb{R}^3$ کدام است؟

- ۱ (1) ۲ (2) ۳ (3) ۴ (4)

پاسخ:

اگر ضرایب را به شکل سطرهای ماتریس A بنویسم، W همان فضای جواب دستگاه همگن است.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow W = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid AX = 0\}$$

بنابراین این بار بعد هر بردار W برابر است با رتبه ماتریس A :

$$W \leq \mathbb{R}^3, \quad \dim W = N_A = 3 - \text{rank } A$$

سطر سوم مجموع دو سطر دیگر است اما دو سطر اول مستقل خطی هستند پس، رتبه ماتریس ۲ است.
در نتیجه:

$$\dim W = 3 - 2 = 1$$

تمرین: اگر بردارهای $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ دوبه‌دو مستقل خطی باشند آیا هر سه نیز مستقل خطی‌اند؟

پاسخ:

خیر، برای مثال هر سطر از این ماتریس را یک بردار فرض کنید. آنها دوبه‌دو مستقل خطی هستند اما تشکیل سه بردار مستقل خطی را نمی‌دهند چون دترمینان ماتریس صفر است.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

نتیجه: فرض کنیم $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ مجموعه‌ای از بردارها باشد. اگر هر زیرمجموعه اکید A ، مستقل خطی باشد، نمی‌توان نتیجه گرفت که A نیز مستقل خطی است.

ارتباط مجموع و اجتماع زیرفضاها

اجتماع دو زیرفضا، لزوماً زیرفضا نیست. اما زیرفضای تولید شده توسط $W_1 \cup W_2$ همان $W_1 + W_2$ است.

$$W_1 + W_2 = \langle W_1 \cup W_2 \rangle$$

قضیه تغییر پایه:

فرض کنیم V فضای برداری n بعدی روی میدان F باشد. $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ و $B' = \{\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n\}$ دو پایه مرتب برای V باشند. مختصات بردار x نسبت به B و مختصات همان بردار نسبت به B' این رابطه را با هم دارند:

$$[X]_{B'} = P^{-1} [X]_B$$

ماتریس معکوس‌پذیر P ماتریسی است که ستون‌هایش مختصات بردارهای عضو پایه B' را نسبت به پایه B نشان می‌دهند.

$$P = \begin{bmatrix} [\alpha'_1]_B & [\alpha'_2]_B & \dots & [\alpha'_n]_B \end{bmatrix} \Rightarrow [X]_{B'} = P^{-1} [X]_B$$

تمرین:

فرض کنیم B پایه استاندارد و $B' = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$ یک پایه مرتب دیگر برای $\mathbb{R}^2$ باشد. ماتریسی را بیابید که مختصات بردار $X = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ تحت B را به مختصات تحت B' تبدیل می‌کند.

پاسخ:

$$B = \left\{ e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$B' = \left\{ \alpha'_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \end{bmatrix}, \alpha'_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$$

مختصات بردارهای عضو B' را نسبت به پایه B به سادگی نوشته می‌شود چون B پایه استاندارد است.

$$\alpha'_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \end{bmatrix} = 2e_1 - 7e_2$$

$$\alpha'_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = 1e_1 + 4e_2$$

این مختصات، ستون‌های ماتریس P هستند:

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$P^{-1} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

مختصات بردار X نسبت به پایه استاندارد را به مختصات نسبت به پایه تبدیل کنیم:

$$[X]_{B'} = P^{-1}[X]_B$$

$$[X]_{B'} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 11 \\ 13 \end{bmatrix}$$

تمرین:

مجموعه $\beta = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ یک پایه مرتب برای $\mathbb{R}^3$ است: $\alpha_1 = (1, 0, -1), \alpha_2 = (1, 1, 1), \alpha_3 = (1, 0, 0)$

مختصات بردار $X = (a, b, c)$ نسبت به پایه مرتب $\beta = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ کدام است؟

$$[X]_{\beta} = (b - c, b, a - 2b + c) \quad -1$$

$$[X]_{\beta} = (b + c, b - a, 2a - c) \quad -2$$

$$[X]_{\beta} = (a + b, b + c, a - 2c) \quad -3$$

$$[X]_{\beta} = (a + b, b, a - 2b + c) \quad -4$$

پاسخ: گزینه ۱

نوشتن مختصات اعضای β نسبت به پایه استاندارد، خیلی ساده است. آنها را در ستون‌های ماتریس P قرار

دهیم:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

دترمینان P برابر با یک است. معکوس آن را به دست آوریم.

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[X]_{\beta} = P^{-1}[X]_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b-c \\ b \\ a-2b+c \end{bmatrix}$$

تمرین:

فرض کنید $W = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a = b + c, b - c = 0\}$. کدام گزینه یک مولد می‌نیمال برای W است؟

-1 $\beta = \{(4, 2, 2, 2), (2, 1, 1, 1)\}$

-2 $\beta = \{(2, 1, 1, 3), (2, 1, 1, 0)\}$

-3 $\beta = \{(4, 2, 2, 1), (1, 0, 1, 0), (2, 1, 1, 1)\}$

-4 $\beta = \{(4, 2, 2, 0), (0, 0, 0, 2), (2, 1, 1, 1)\}$

پاسخ: گزینه ۲

مولد می‌نیمال، همان پایه است. یک پایه برای W می‌خواهیم. W زیرفضای $\mathbb{R}^4$ است و دو شرط همگن و مستقل $b - c = 0$ و $a = b + c$ دارد پس $\dim W = 4 - 2 = 2$. پس W پایه دو عضوی دارد. گزینه صحیح باید دو عضوی باشد. با استفاده از دو شرط همگن، شکل اعضای W را بیابیم:

$$a = b + c, b - c = 0 \Rightarrow a = 2b, c = b$$

$$\Rightarrow W = \{(2b, b, b, d) \in \mathbb{R}^4 \mid b, d \in \mathbb{R}\}$$

اعضای W به این فرم هستند: $(2b, b, b, d) = b(2, 1, 1, 0) + d(0, 0, 0, 1)$

بردارهای مستقل $\alpha_1 = (2, 1, 1, 0)$, $\alpha_2 = (0, 0, 0, 1)$ یک پایه برای W هستند. پس α_1 و $3\alpha_2$ نیز یک پایه برای آن هستند.

رونسکین

رونسکین n تابع مشتق پذیر ، دترمینان ماتریس زیر است:

$$\omega(f_1, f_2, \dots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ f_1' & f_2' & \dots & f_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

توابع $f_1, f_2, \dots, f_n$ مستقل خطی هستند اگر و تنها اگر رونسکین آنها تابع ثابت صفر نباشد.

تمرین: آیا مجموعه $\{6x + 2x^2, 2 + x^2, 3x - 2\}$ یک پایه برای فضای برداری $P_2(\mathbb{R})$ است؟

پاسخ:

فضای $P_2(\mathbb{R})$ سه بعدی است و این مجموعه هم سه عضو دارد. پس اگر مستقل خطی باشد، یک پایه برای این فضا خواهد بود. برای تشخیص استقلال خطی می توانیم از دترمینان ماتریس ضرایب استفاده کنیم. همچنین می توانیم از رونسکین استفاده کنیم.

روش اول: ماتریس ضرایب

$$\begin{matrix} 6x + 2x^2 \\ 2 + x^2 \\ -2 + 3x \end{matrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -12 + 12 = 0$$

پس این مجموعه، مستقل خطی نیست. در نتیجه پایه ای برای فضا نیست.

روش دوم: استفاده از رونسکین

$$\begin{vmatrix} 6x + 2x^2 & 2 + x^2 & -2 + 3x \\ 6 + 4x & 2x & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 12(2 + x^2) + 2(-2 + 3x)(6 + 4x) - 8x(-2 + 3x) - 6(6x + 2x^2) = 0$$

پس این مجموعه، مستقل خطی نیست. در نتیجه پایه ای برای فضا نیست.

مثال: فرض کنید U فضای چندجمله‌ای‌های تولید شده توسط $1, x^2, x^4, x^6$ روی $\mathbb{R}$ باشد. مختصات بردار $x^6 + x^4 - x^2 - 2$ در پایه مرتب $\{1 - x^2, x^2 - x^4, x^4 - x^6, 1 + x^6\}$ کدام است؟

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad -2$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad -4$$

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad -1$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad -3$$

پاسخ: گزینه ۴

$$\alpha_1 = 1 - x^2, \alpha_2 = x^2 - x^4, \alpha_3 = x^4 - x^6, \alpha_4 = 1 + x^6$$

$$p(x) = x^6 + x^4 - x^2 - 2 = a(1 - x^2) + b(x^2 - x^4) + c(x^4 - x^6) + d(1 + x^6)$$

$$\Rightarrow x^6 + x^4 - x^2 - 2 = (a + d) + (-a + b)x^2 + (-b + c)x^4 + (-c + d)x^6$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + d = -2 \\ -a + b = -1 \\ -b + c = 1 \\ -c + d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b + d = -3 \\ d - b = 2 \end{cases} \Rightarrow d = -\frac{1}{2}, c = -\frac{3}{2}, b = -\frac{5}{2}, a = -\frac{3}{2}$$

$$[p(x)]_\beta = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

مثال:

فرض کنیم $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ یک پایه مرتب برای $\mathbb{R}^3$ باشد. اگر $\beta_1 = \alpha_2, \beta_2 = \alpha_3, \beta_3 = \alpha_1$ آنگاه ماتریس تغییر مختصات از $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ به $B' = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ کدام است؟

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad -2$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad -4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad -1$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad -3$$

پاسخ: گزینه ۴

مختصات عناصر پایه جدید نسبت به پایه قبلی، ستون‌های ماتریس هستند:

$$\beta_1 = \alpha_2 \Rightarrow \beta_1 = 0\alpha_1 + 1\alpha_2 + 0\alpha_3$$

$$\beta_2 = \alpha_3 \Rightarrow \beta_2 = 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + 1\alpha_3$$

$$\beta_3 = \alpha_1 \Rightarrow \beta_3 = 1\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{در نتیجه:}$$

تمرین:

فرض کنید $W \leq M_r(\mathbb{C})$ زیر فضای ماتریس‌های متقارن باشد. بعد این زیرفضا روی میدان $\mathbb{C}$ و روی میدان

$$W = \{A \in M_r(\mathbb{C}) \mid A^T = A, \text{tr} A = 0\}$$

کدامند؟ $\mathbb{R}$

$$\dim_{\mathbb{C}}(W) = 3, \dim_{\mathbb{R}}(W) = 6 \quad -1$$

$$\dim_{\mathbb{C}}(W) = 2, \dim_{\mathbb{R}}(W) = 2 \quad -2$$

$$\dim_{\mathbb{C}}(W) = 2, \dim_{\mathbb{R}}(W) = 4 \quad -3$$

$$\dim_{\mathbb{C}}(W) = 3, \dim_{\mathbb{R}}(W) = 3 \quad -4$$

پاسخ: گزینه ۴

روش اول: هر ماتریس مختلط A که عضو W باشد متقارن است و اثر آن صفر است پس به این فرم است:

$$A^T = A, \text{tr} A = 0 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} a+ib & c+id \\ c+id & -(a+ib) \end{bmatrix}$$

هر یک از این ماتریس‌ها با ۲ عدد مختلط $a+ib$ و $c+id$ ساخته می‌شود پس روی میدان اعداد مختلط

$\dim_{\mathbb{C}}(W) = 2$. از طرفی هر عدد مختلط با دو عدد حقیقی ساخته می‌شود پس هر یک از این ماتریس‌ها

با ۴ عدد حقیقی a و b و c و d ساخته می‌شود پس روی میدان اعداد حقیقی $\dim_{\mathbb{R}}(W) = 4$.

روش دوم: روی میدان اعداد مختلط، عناصر W توسط دو ماتریس مستقل زیر تولید می‌شوند:

$$A = (a+ib) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + (c+id) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

پس $\dim_{\mathbb{C}}(W) = 2$. روی میدان اعداد حقیقی، ضرایب اسکالر باید عدد حقیقی باشند پس عناصر W

توسط چهار ماتریس مستقل زیر تولید می‌شوند:

$$A = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

پس $\dim_{\mathbb{R}}(W) = 4$.

فضاهای چهارگانه ماتریس A

ابتدا یادآوری کنیم که رتبهٔ سطری و رتبهٔ ستونی A با هم برابرند پس هر دوی آنها را $\text{rank } A$ می‌نامیم. اکنون فرض کنیم A یک ماتریس $m \times n$ حقیقی باشد. این ماتریس مانند یک تابع است که هر بردار $X \in \mathbb{R}^n$ را به بردار $Y = AX \in \mathbb{R}^m$ تبدیل می‌کند. $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ماتریس A چهار زیرفضا در $\mathbb{R}^m$ و $\mathbb{R}^n$ به وجود می‌آورد:

1- فضای ستونی A با نماد $C(A)$ نشان داده می‌شود و بُعد آن برابر با رتبه $\text{rank } A$ است.

این زیرفضا توسط ستون‌های تولید می‌شود و زیرفضای $\mathbb{R}^m$ است:

$$C(A) = \{AX \mid X \in \mathbb{R}^n\}$$

$$C(A) \leq \mathbb{R}^m$$

2- فضای پوچ A با نماد $N(A)$ نشان داده می‌شود. بُعد آن $n - \text{rank } A$ است.

به عبارتی بعد فضای پوچ برابر است با تعداد ستون‌ها منهای رتبهٔ A .

فضای پوچ A همان فضای جواب دستگاه همگن $AX = 0$ است.

$$N(A) = \{X \in \mathbb{R}^n \mid AX = 0\}$$

$$N(A) \leq \mathbb{R}^n$$

3- فضای سطری A که همان فضای ستونی A^T است یعنی $C(A^T)$ بعد این فضا نیز $\text{rank } A$

است. اما زیرفضای $\mathbb{R}^n$ است.

$$C(A^T) = \{A^T Y \mid Y \in \mathbb{R}^m\}$$

$$C(A^T) \leq \mathbb{R}^n$$

4- فضای پوچ چپ A همان فضای پوچ A^T است. این فضا شامل تمام بردارهایی مانند Y است

که در رابطه $Y^T A = 0$ صدق می‌کنند و با نماد $N(A^T)$ نوشته می‌شود.

بُعد آن $m - \text{rank } A$ است. یعنی تعداد سطرهای A منهای رتبه آن.

$$\{Y \in \mathbb{R}^m \mid Y^T A = 0\} = \{Y \in \mathbb{R}^m \mid A^T Y = 0\} = N(A^T)$$

$$N(A^T) \leq \mathbb{R}^m$$

خلاصه:

$$\dim \text{row } A = \dim \text{col } A = \text{rank } A$$

$$\dim N(A) = n - \text{rank } A$$

$$\dim N(A^T) = m - \text{rank } A$$

مثال: بعد فضاهای سطری و فضای ستونی ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ را بیابید. یک پایه برای هر کدام از آنها بنویسید.

پاسخ:

با تبدیل ماتریس به ماتریس سطری پلکانی هم رتبه آن و هم پایه برای فضاهای سطری و ستونی به دست می‌آوریم.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

در ماتریس سطری پلکانی، اولین درایه غیر صفر هر سطر عنصر محوری است.

تعداد عناصر محوری رتبه ماتریس را نشان می‌دهد. $\text{rank } A = 3$

سطرهایی که شامل عناصر محوری هستند پایه‌ای برای فضای سطری هستند.

$$B_{\text{row}(A)} = \{(1, 2, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$$

ستون‌هایی که شامل عناصر محوری هستند پایه‌ای برای فضای ستونی هستند.

$$B_{\text{col}(A)} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

مثال: فضای ستونی ماتریس A را بررسی کنیم.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

فضای تولید شده توسط ستون ها همان فضای شامل همه AX ها است:

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2y \\ 2x-y \\ 3x+y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{رتبه ماتریس برابر با ۲ است. اگر دقت کنید همه بردارهای } \begin{bmatrix} x+2y \\ 2x-y \\ 3x+y \end{bmatrix} \text{ در صفحه } z = x + y \text{ قرار}$$

دارند. (مولفه سوم مجموع دو مولفه اول است) که یک زیر فضای بعدی $\mathbb{R}^3$ است.

مثال: بعد W را بیابید.

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

پاسخ:

عناصر این زیرفضا را می توان به صورت ترکیب خطی از ستون های ماتریس فوق نوشت. یعنی W همان فضای ستونی ماتریس است.

$$W = \{ (x_2 - 2x_3 - x_4, x_1 - 2x_2 + 3x_3, 2x_1 - x_2 - 3x_4) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \}$$

$$(x_2 - 2x_3 - x_4, x_1 - 2x_2 + 3x_3, 2x_1 - x_2 - 3x_4) = x_1(0, 1, 2) + x_2(1, -2, -1) + x_3(-2, 3, 0) + x_4(-1, 0, -3)$$

رتبه ماتریس برابر با ۲ است زیرا دو سطر اول مستقل هستند اما $R_3 = 2R_2 - 3R_1$ پس $\dim W = 2$.

مثال: بُعد N را بیابید.

$$N = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 0\}$$

پاسخ:

$$N = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0\}$$

N همان فضای پوچ ماتریس فوق است. بُعد آن برابر است با تعداد ستون‌ها منهای رتبه ماتریس.

رتبه ماتریس برابر با ۲ است زیرا دو سطر اول مستقل هستند اما $R_3 = 2R_2 - 3R_1$ پس:

$$\dim N = 4 - 2 = 2$$

توجه: در واقع این رابطه بین بُعد فضای پوچ و بُعد فضای ستونی برقرار است:

$$\text{بُعد } C(A) + \text{بُعد } N(A) = \text{تعداد ستون‌ها.}$$

مثال: بُعد زیرفضای U از فضای سه بعدی را تعیین کنید.

$$U = \{(a+b, b+c, c+d) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

پاسخ:

زیرفضای U زیرفضای تولید شده توسط ستون‌های ماتریس ضرایب است:

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\dim U = \text{rank } A = 3 \Rightarrow U = \mathbb{R}^3$$

مثال: بُعد زیرفضای N از فضای چهار بعدی را تعیین کنید.

$$N = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a = b - d, a = c + d\}$$

پاسخ:

$$N = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a - b + d = 0, a - c - d = 0\}$$

$$N = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = 0\}$$

N فضای پوچ ماتریس فوق است. رتبه ماتریس برابر با ۲ است پس:

$$\dim N = 4 - 2 = 2$$

مثال: (فضای پوچ چپ)

فرض کنیم ماتریس A و زیرفضای W به این صورت داده شده باشند:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 6 & -1 & 3 \\ -2 & 6 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad W = \{X \in \mathbb{R}^4 \mid X^T A = 0\}$$

بُعد این زیرفضا چند است؟

پاسخ:

W زیرفضای پوچ چپ A است که برابر با فضای پوچ ترانهاده A است و بُعد آن برابر است با تعداد سطرهاي A منهای رتبه A .

$$W = \{X \in \mathbb{R}^4 \mid X^T A = 0\} = \{X \in \mathbb{R}^4 \mid A^T X = 0\} \Rightarrow W = N(A^T)$$

اگر به رابطه بین ستون‌ها توجه کنید فقط دو ستون مستقل خطی داریم. پس رتبه ماتریس ۲ است.

$$\dim W = 4 - \text{rank } A = 4 - 2 = 2$$

چند قضیه درباره رتبه ماتریس

1- اگر $\text{rank } A = m$ (برابر تعداد سطرها) باشد، A دارای معکوس راست است.

$$\text{rank } A = m \Rightarrow \exists B \quad AB = I$$

مثال:

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{rank}(A) = 2$$

$$AB = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2- اگر $\text{rank } A = n$ (برابر تعداد ستون‌ها) باشد، A دارای معکوس چپ است.

$$\text{rank } A = n \Rightarrow \exists C \quad CA = I$$

مثال:

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & -1 \\ 8 & -18 \end{bmatrix} \quad \text{rank}(A) = 2$$

$$CA = \begin{bmatrix} 0/1 & 0/7 & 0 \\ 0 & 0/8 & -0/1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & -1 \\ 8 & -18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3- اگر $\text{rank } A = n = m$ باشد، A دارای معکوس دوسویه است.

$$\text{rank } A = n = m \Rightarrow AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

4- فرض کنید $n > m$ باشد در این صورت ماتریس $A_{m \times n}$ امکان ندارد از چپ معکوس پذیر شود اما ممکن است از راست معکوس پذیر شود زیرا در بهترین حالت رتبه ممکن است با m برابر شود.

5- خلاصه روابطی که در مورد رتبه و پوچی یک ماتریس گفته شد:

$$\text{rank } A \leq \text{Min}(n, m)$$

$$\dim \text{row } A = \dim \text{col } A = \text{rank } A$$

$$\dim N(A) = n - \text{rank } A$$

6- درباره حاصلضرب ماتریس‌ها (در فصل بعد می‌بینیم که AB مانند ترکیب دو نگاشت است):

$$A_{m \times n}, B_{n \times k}$$

$$\text{rank}(AB) \leq \text{Min}(\text{rank } A, \text{rank } B)$$

$$\text{rank}(AB) \geq \text{rank } A + \text{rank } B - n$$

7- درباره رتبهٔ مجموع دو ماتریس:

$$A_{m \times n}, B_{m \times n}$$

$$\text{rank}(A + B) \leq \text{rank } A + \text{rank } B$$

8- ماتریس مربع معکوس پذیر ($\text{rank } A = n = m$) در رتبهٔ AB و BA تاثیری نمی‌گذارد یعنی رتبه ماتریس B را حفظ می‌کند:

$$\text{rank } AB = \text{rank } B$$

$$\text{rank } BA = \text{rank } B$$

علوم ریاضی ۹۶

مثال: فرض کنیم $A \in M_n(\mathbb{R})$ و $\text{rank} A = k > 0$ در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

1- $\text{rank} A^T = k$

2- $\text{rank} A^T < k$

3- $A = \sum_{i=1}^k A_i$ s.t. $\text{rank} A_i = 1$

4- $A = A_1 A_2 \dots A_n$ s.t. $\text{rank} A_i = 1$

پاسخ: گزینه ۳

$\text{rank} A = k > 0$ پس می‌توان ماتریس A را با ماتریسی هم ارز دانست که فقط k سطر غیر صفر مستقل خطی دارد و سایر سطرهاى آن صفر هستند. حالا k ماتریس در نظر بگیریم که هر کدام از آنها فقط در یک سطر غیر صفر مانند A هستند و سایر سطرهاىشان صفر است می‌بینیم که هر کدام از آنها رتبه یک دارند و مجموع آنها A است.

مانند ماتریس زیر که رتبه آن ۲ است و به مجموع دو ماتریس با رتبه یک تبدیل شده است:

$$\begin{bmatrix} 9 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

زیرفضاهای متعامد

اگر یک W زیرفضای $\mathbb{R}^n$ باشد $W^\perp$ زیرفضایی است شامل همه بردارهایی که بر همه اعضای W عمودند. البته این تعریف مختص فضای نیست و در هر فضای برداری که ضرب داخلی قابل تعریف باشد عمود بودن نیز قابل تعریف است.

$$W \leq V \Rightarrow W^\perp = \{u \in V \mid \forall v \in W \quad u \cdot v = 0\}$$

مثال: در فضای $\mathbb{R}^3$ $V = \mathbb{R}^3$:

$$W = \{(a, b, c) \mid a = b + c\}$$

$$W^\perp = \{(x, y, z) \mid ax + by + cz = 0 \quad \forall (a, b, c) \in W\}$$

یک صفحه است که از مبدأ می‌گذرد، زیرفضای متعامد آن یک خط است که بر آن صفحه عمود است و از مبدأ می‌گذرد.

نکته: در هر فضای برداری n بعدی مانند:

$$W \cap W^\perp = \{0\} \Rightarrow W + W^\perp = W \oplus W^\perp$$

$$\dim W + \dim W^\perp = n \Rightarrow W \oplus W^\perp = V$$