

موسسه بابان

راهیان ارشد و دکتری انتشارات بابان

جبر خطی

فصل دوم: دترمینان

(ویژه کنکور ارشد و دکتری ۱۴۰۶)

ویژه داوطلبان کنکور ارشد و دکتری مهندسی کامپیوتر و علوم کامپیوتر

براساس کتب مرجع

دیوید سی. لی، استیون آر. لی، جودی جی. مکدونالد، فیلیپ ان. کلاین، بن نوبل، جیمز دبلیو. دنیل

ابوالفضل گیلک

بسم الله الرحمن الرحيم

مبانی ماتریس ها و جبر خطی

ابوالفضل گیلک

فصل دوم: دترمینان

- تابع دترمینان
- فرمول بازگشتی دترمینان (گسترش)
- فرمول مستقیم دترمینان (جایگشت ها و گسترش)
- ویژگیهای دترمینان
- وارون ماتریس
- حل کرامر دستگاه

دترمینان

2

حلقه جابجایی

ساختار جبری $(K, +, \times)$ یک حلقه جابجایی (جابجایی یک‌دار) است هرگاه تمام ویژگی‌های یک میدان به جز احتمالا دو ویژگی را داشته باشد: در حلقه جابجایی، لزومی ندارد که هر عنصر غیرصفر دارای وارون ضربی باشد. در حلقه جابجایی لازم نیست $1_K \neq 0_K$ باشد.

مثال: هر میدان یک حلقه جابجایی است. مانند:

$$(\mathbb{Q}, +, \times), (\mathbb{R}, +, \times), (\mathbb{C}, +, \times), (\mathbb{Z}_p, +, \times)$$

در این میدان‌ها هر عنصر غیرصفر، دارای وارون است.

مثال: مجموعه اعداد صحیح با جمع و ضرب معمولی اعداد یک میدان نیست اما یک حلقه جابجایی است. در $(\mathbb{Z}, +, \times)$ فقط اعداد ۱ و -۱ دارای وارون هستند.

تابع خطی

تابع $T: V \rightarrow W$ بین دو فضای برداری روی میدان $\mathbb{R}$ را خطی گوئیم هرگاه برای هر جفت بردار $\alpha, \beta \in V$ و ضریب $c \in \mathbb{R}$ داشته باشیم:

$$T(\alpha + \beta) = T(\alpha) + T(\beta)$$

$$T(c\alpha) = cT(\alpha)$$

البته هر دو شرط را می‌توان در یک معادله خلاصه کرد:

$$T(c\alpha + \beta) = cT(\alpha) + T(\beta)$$

در فصل سوم و چهارم توابع خطی را بیشتر مطالعه خواهیم کرد.

مثال:

در بین توابع از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ فقط توابع به فرم $f(x) = kx$ خطی هستند.

تابع $f(x) = x^2$ خطی نیست زیرا:

$$\begin{cases} f(a+b) = (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \\ f(a) + f(b) = a^2 + b^2 \end{cases} \Rightarrow f(a+b) \neq f(a) + f(b)$$

تابع $g(x) = 2x + 5$ خطی نیست زیرا:

$$\begin{cases} f(a+b) = 2(a+b) + 5 = 2a + 2b + 5 \\ f(a) + f(b) = 2a + 5 + 2b + 5 = 2a + 2b + 10 \end{cases} \Rightarrow f(a+b) \neq f(a) + f(b)$$

مثال: تابع Trace یک تابع خطی است:

$$F: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F(A) = \text{tr } A$$

$$\text{tr}(A+B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B), \quad \text{tr}(cA) = c \text{tr}(A)$$

تابع n -خطی

فرض کنیم K یک حلقه جابجایی و $M_{n \times n}(K)$ مجموعه ماتریس‌های روی K باشد. تابع $D: M_{n \times n}(K) \rightarrow K$ را n -خطی می‌نامیم هرگاه نسبت به هر کدام از سطرها با فرض ثابت بودن سایر سطرها، خطی باشد. به عبارتی اگر α_i سطر i ام ماتریس باشد، با فرض ثابت بودن سایر سطرها داشته باشیم:

$$D(\alpha_i + c\alpha'_i) = D(\alpha_i) + cD(\alpha'_i)$$

ساخت یک تابع n - خطی :

هرگاه از هر سطر ماتریس $A_{n \times n}$ دقیقا یک درایه را انتخاب کنیم و در هم ضرب کنیم، حاصلضرب آنها یک تابع n - خطی روی ماتریس‌های $n \times n$ است.

مثال: تابع $D: M_{n \times n}(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ را با این ضابطه در نظر بگیریم:

$$D\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\right) = 5a_{12}a_{23}a_{31}$$

D تابع n - خطی است. برای مثال با فرض ثابت بودن سایر سطرها، نسبت به سطر دوم خطی است:

$$D\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ca_{21} & ca_{22} & ca_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\right) = 5ca_{12}a_{23}a_{31}$$

$$D\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ca_{21} + a'_{21} & ca_{22} + a'_{22} & ca_{23} + a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\right) = 5a_{12}(ca_{23} + a'_{23})a_{31} = 5ca_{12}a_{23}a_{31} + 5a_{12}a'_{23}a_{31}$$

قضیه:

الف: اگر از هر سطر $A_{n \times n}$ دقیقا یک عنصر انتخاب کنیم، حاصلضرب آنها تابعی n - خطی است.

ب: هر ترکیب خطی از توابع n - خطی، تابعی n - خطی است.

مثال:

همه توابع 2 - خطی روی ماتریس‌های 2×2 به این فرم هستند:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad D(A) = c_1 a_{11} a_{22} + c_2 a_{11} a_{21} + c_3 a_{12} a_{22} + c_4 a_{12} a_{21}$$

تابع متناوب و تابع دترمینان:

تابع n -خطی D را متناوب گوئیم هرگاه این دو شرط برقرار باشد:

1- اگر دو سطر از A یکسان باشند داشته باشیم: $D(A) = 0$

2- اگر A' حاصل جابجایی دو سطر از A باشد آنگاه: $D(A') = -D(A)$

حال اگر تابع D متناوب باشد و شرط زیر را نیز داشته باشد تابع دترمینان نامیده می‌شود:

3- برای ماتریس همانی داشته باشیم: $D(I) = 1$

مثال:

توابع n -خطی زیر را برای ماتریس‌های 2×2 مشاهده کنید:

$$D_1 \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = ac + bd$$

$$D_2 \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = ad - bc$$

$$D_3 \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = ad - bc$$

D_1 شرایط تابع متناوب را ندارد. D_2 متناوب است اما شرط سوم را ندارد. D_3 متناوب است و شرط سوم را نیز دارد پس یک تابع دترمینان است.

قضیه:

برای هر $n \geq 1$ یک تابع دترمینان یکتا برای ماتریس‌های $n \times n$ وجود دارد.

برای مثال فرمول $\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$ تنها فرمولی است که تابع دترمینان برای 2×2 است.

محاسبه تابع دترمینان:

تابع دترمینان به دو روش قابل محاسبه است. روش اول: فرمول بازگشتی بر حسب دترمینان ماتریس‌های

کوچکتر، روش دوم: فرمول مستقیم به شکل ترکیب خطی از حاصل ضرب‌های جایگشتی.

فرمول بازگشتی برای دترمینان

فرض کنیم $D(A)$ دترمینان ماتریس $A_{n \times n}$ باشد و D_{ij} دترمینان ماتریس $A(i|j)$ باشد که از حذف یک سطر و ستون A به دست می‌آید، در این صورت:

$$D(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} D_{ij}(A)$$

طبق این فرمول می‌توان از گسترش روی یک سطر یا یک ستون برای محاسبه دترمینان استفاده کرد.

مثال:

دترمینان ماتریس زیر با استفاده از گسترش روی سطر سوم محاسبه کنیم.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 6 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D(A) = (-1)^{3+1}(5) \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}(1) \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}(0) \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$D(A) = (5)(-8) - (1)(4) + (0) = -44$$

دترمینان بر حسب جایگشت‌ها

فرض کنیم $\sigma = (k_1, k_2, k_3, \dots, k_n)$ جایگشتی از اعداد $(1, 2, 3, \dots, n)$ باشد. جایگشت σ با تعدادی جابجایی جفت عناصر از $(1, 2, 3, \dots, n)$ به دست می‌آید. اگر تعداد جابجایی‌ها زوج باشد σ را جایگشت زوج می‌نامیم. در غیر این صورت آن را فرد می‌نامیم. مثلاً در حالت $n=3$ جایگشت‌های زوج و فرد عبارتند از:

جایگشت زوج	جایگشت فرد
$(1, 2, 3)$	$(3, 2, 1)$
$(2, 3, 1)$	$(2, 1, 3)$
$(3, 1, 2)$	$(1, 3, 2)$

اگر m تعداد جفت‌های جابجا شده برای رسیدن از $(1, 2, 3, \dots, n)$ به $(k_1, k_2, k_3, \dots, k_n)$ باشد، علامت جایگشت σ چنین تعریف می‌شود:

$$\text{sgn } \sigma = (-1)^m = \begin{cases} +1 & m \text{ even} \\ -1 & m \text{ odd} \end{cases}$$

همچنین $a_{1k_1} a_{2k_2} a_{3k_3} \dots a_{nk_n}$ را حاصلضرب جایگشت σ می‌نامیم و با $P(\sigma)$ نشان می‌دهیم.

$$\sigma = (k_1, k_2, k_3, \dots, k_n) \Rightarrow P(\sigma) = a_{1k_1} a_{2k_2} a_{3k_3} \dots a_{nk_n}$$

دترمینان ماتریس $A_{n \times n}$ از این رابطه به دست می‌آید:

$$D = \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) P(\sigma) = \sum_{\sigma} (-1)^m a_{1k_1} a_{2k_2} a_{3k_3} \dots a_{nk_n}$$

در این مجموع همه جایگشت‌ها که تعدادشان $n!$ است ظاهر می‌شوند.

مثال: فرمول ساروس

دترمینان ماتریس 3×3 را با استفاده از جایگشت‌ها به دست می‌آوریم:

σ	$\text{sgn } \sigma$	$P(\sigma)$
$(1, 2, 3)$	$+1$	$a_{11} a_{22} a_{33}$
$(2, 3, 1)$	$+1$	$a_{12} a_{23} a_{31}$
$(3, 1, 2)$	$+1$	$a_{13} a_{21} a_{32}$
$(3, 2, 1)$	-1	$a_{13} a_{22} a_{31}$
$(2, 1, 3)$	-1	$a_{12} a_{21} a_{33}$
$(1, 3, 2)$	-1	$a_{11} a_{23} a_{32}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32}$$

ماتریس الحاقی ($\text{adj } A$)

برای هر جفت (i, j) ماتریس $A(i|j)$ از حذف سطر i و ستون j از ماتریس A به دست می‌آید و $D_{ij}(A) = \det A(i|j)$ اسکالر $(-1)^{i+j} D_{ij}(A)$ را همسازۀ سطر i و ستون j ماتریس A می‌نامیم. اگر ماتریس همسازۀها را بنویسیم، و از آن ترانهادۀ بگیریم ماتریس الحاقی ($\text{adj } A$) به دست می‌آید. مثلاً برای ماتریس 3×3 داریم:

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} D_{11}(A) & -D_{12}(A) & D_{13}(A) \\ -D_{21}(A) & D_{22}(A) & -D_{23}(A) \\ D_{31}(A) & -D_{32}(A) & D_{33}(A) \end{bmatrix}^T$$

مثال: ماتریس همسازۀ و ماتریس الحاقی A را محاسبه کرده‌ایم:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow D = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 7 \\ -18 & 14 & -6 \\ 24 & -34 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{adj } A = D^T = \begin{bmatrix} -2 & -18 & 24 \\ -1 & 14 & -34 \\ 7 & -6 & 8 \end{bmatrix}$$

فرمول عمومی A^{-1} :

- ماتریس $A_{n \times n}$ معکوس‌پذیر (نامنفرد) است اگر و تنها اگر $\det A$ اسکالری معکوس‌پذیر باشد.
- در حلقه $M_{n \times n}(\mathbb{Z})$ (ماتریس‌های با درایه‌های صحیح)، ماتریس‌هایی معکوس‌پذیرند که دترمینان آنها $+1$ یا -1 باشد. زیرا در $\mathbb{Z}$ فقط ± 1 معکوس‌پذیرند.
- در $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ ماتریس‌هایی معکوس‌پذیرند که دترمینان آنها مخالف صفر باشد. به طور کلی در $M_{n \times n}(F)$ چنین است (برای هر میدان F).
- به صورت پیش‌فرض روی میدان اعداد حقیقی محاسبه انجام می‌دهیم و معکوس‌پذیر بودن به این معناست که $\det A \neq 0$ باشد.
- در همه این موارد، A^{-1} ، در صورت وجود از این رابطه به دست می‌آید:

$$A^{-1} = (\det A)^{-1} (\text{adj } A)$$

مثال: وارون ماتریس A را در صورت وجود بیابید:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

پاسخ:

$$\det A = (1 \cdot 5 + 0 + 0) - (-6 + 0 + 10) = 11$$

دترمینان غیر صفر است پس A وارون پذیر است.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 5 & 4 & -6 \\ -5 & 7 & -5 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 5 & -5 & 3 \\ 4 & 7 & -2 \\ -6 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

فقط برای تمرین حاصل ضرب A و A^{-1} را حساب می‌کنیم تا ببینیم که ماتریس همانی به دست می‌آید:

$$AA^{-1} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -5 & 3 \\ 4 & 7 & -2 \\ -6 & -5 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال: در حلقه $M_{3 \times 3}(\mathbb{Z})$ ماتریس A معکوس پذیر است. مقادیر ممکن برای $\operatorname{tr} A$ کدامند؟

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 5 \\ 5 & 5 & m \end{bmatrix}$$

(4) $-11, 5$

(3) $11, -15$

(2) $7, -15$

(1) $7, 11$

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا توجه کنیم که در $M_{3 \times 3}(\mathbb{Z})$ درایه‌ها عدد صحیح هستند پس m باید عددی صحیح باشد. ماتریس A معکوس‌پذیر پس $\det A$ باید عددی معکوس‌پذیر در $\mathbb{Z}$ باشد. در مجموعه اعداد صحیح فقط $+1$ و -1 معکوس‌پذیرند پس $\det A$ باید $+1$ یا -1 باشد.

$$\det A = m^2 - 25 + 5m$$

$$\det A = 1 \Rightarrow m^2 + 5m - 24 = 0 \Rightarrow \Delta = 129 \Rightarrow m \notin \mathbb{Z}$$

$$\det A = -1 \Rightarrow m^2 + 5m - 24 = 0 \Rightarrow \Delta = 121 \Rightarrow m = \frac{-5 \pm 11}{2} = +3, -8$$

$$\text{trace } A = 7 \text{ پس } \text{trace } A = 2m + 1 \text{ یا } \text{trace } A = -15$$

ویژگی‌های دترمینان:

- هرگاه یک سطر یا یک ستون ماتریس $A_{n \times n}$ صفر باشد: $\det A = 0$.
- هرگاه یک سطر (ستون) مضربی از سطر (ستون) دیگر باشد: $\det A = 0$.
- هرگاه یک سطر (ستون) در b ضرب شود، دترمینان نیز در b ضرب می‌شود.
- هرگاه ماتریس $A_{n \times n}$ در b ضرب شود، دترمینان در b^n ضرب می‌شود.
- $\det(bA) = b^n \det(A)$
- با جابجایی هر جفت از سطرها (ستون‌ها) دترمینان قرینه می‌شود.
- تابع دترمینان جمعی نیست. $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$.
- تابع دترمینان ضربی است: $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.
- به دلیل ضربی بودن دترمینان داریم: $\det(A^m) = (\det(A))^m$.
- به ویژه برای $m = -1$ داریم: $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1} = \frac{1}{\det(A)}$.
- A و ترانژاده A دترمینان برابر دارند: $\det(A^t) = \det(A)$.

مثال: ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. اگر $f(x) = \det(xI - A)$ چندجمله‌ای مشخصه این ماتریس باشد، مقدار $f(0)$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر ۱۳۹۹)

- (1) -۳۶ (2) -۴۹ (3) ۳۶ (4) ۴۹

پاسخ: گزینه ۲

با قرار دادن $x = 0$ در تابع f داریم:

$$f(0) = \det(0 - A) = \det(-A) = (-1)^r \det(A) = -\det(A) = -(30 - 12 + 4 + 40 - 9 - 4) = -49$$

مثال: فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{bmatrix}$ ، دترمینان A برابر کدام گزینه است؟ (علوم کامپیوتر ۱۳۹۶)

- (1) ۶ (2) ۱۲ (3) ۱۸ (4) ۲۴

پاسخ: گزینه ۲

با اعمال سطری مقدماتی ماتریس را به ماتریس بالامثلثی تبدیل کنیم.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_2 \leftarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - R_1 \\ R_4 \leftarrow R_4 - R_1 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 8 & 15 \\ 0 & 7 & 26 & 63 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} R_3 \leftarrow R_3 - 3R_2 \\ R_4 \leftarrow R_4 - 7R_2 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 12 & 42 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 - 6R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

دترمینان ماتریس بالا مثلثی حاصل ضرب عناصر قطر اصلی است.

$$\det A = 1 \times 1 \times 2 \times 6 = 12$$

مثال: فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$ ، دترمینان A برابر کدام گزینه است؟ (علوم کامپیوتر ۱۳۹۶)

۲۴ (4)

۱۲۰ (3)

۰ (2)

۶ (1)

پاسخ: گزینه ۲

از سطر چهارم، سطر سوم را کم کنیم. از سطر سوم، سطر دوم را کم کنیم.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

دو سطر ماتریس برابرند پس دترمینان صفر است.

دترمینان چند ماتریس معروف:

1- دترمینان ماتریس واندرموند

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$$

مثلاً:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 4 & 4^2 \\ 1 & 7 & 7^2 \end{vmatrix} = (4-2)(7-2)(7-4) = 30$$

مثال: فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{bmatrix}$ ، دترمینان A برابر کدام گزینه است؟ (علوم کامپیوتر ۱۳۹۶)

- ۶ (1) ۱۲ (2) ۱۸ (3) ۲۴ (4)

پاسخ: گزینه ۲

اگر از A ترانزاده بگیریم، ماتریس واندرموند با پارامترهای $x_1=1, x_2=2, x_3=3, x_4=4$ به دست می‌آید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$\det A = (2-1)(3-1)(4-1)(3-2)(4-2)(4-3) = 12$$

2- در ماتریس واندرموند به جای ستون x_i^{n-1} اگر حاصلضرب سایر عناصر را قرار دهیم دترمینان

تغییری نمی‌کند. برای مثال:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & bcd \\ 1 & b & b^2 & acd \\ 1 & c & c^2 & abd \\ 1 & d & d^2 & abc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$

3- دترمینان ماتریس 3×3 زیر نیز شناخته شده است:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c)$$

4- این فرمول برای محاسبه دترمینان هر ماتریس مربع که درایه‌های غیر قطری‌اش همه یک باشند

استفاده می‌شود:

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix} = abcd \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right)$$

اگر مخرج یک کسر صفر بود فرمول را به این شکل بنویسید:

$$abcd + bcd + acd + abd + abc$$

مثال: فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، دترمینان A برابر کدام گزینه است؟

- (1) 6 (2) 0 (3) 36 (4) 46

پاسخ:

$$|A| = |A^t| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-4 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = (1)(-3)(2)(-4)\left(1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = 46$$

5- با شروع از مقدار دلخواه a و ایجاد تصاعد حسابی با اندازه گام دلخواه q داریم:

$$\begin{vmatrix} a & a+q & a+2q \\ a+3q & a+4q & a+5q \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a & a+q & a+2q & a+3q \\ a+4q & a+5q & a+6q & a+7q \\ a+8q & a+9q & a+10q & a+11q \\ a+12q & a+13q & a+14q & a+15q \end{vmatrix} = 0$$

6- دترمینان این ماتریس 4×4 که متقارن است و از مربعات اعداد صحیح ساخته می‌شود

صفر است:

$$\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{vmatrix} = 0$$

فرمول کرامر برای حل دستگاه معادلات خطی:

$$\text{فرض کنید } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ جواب دستگاه معادلات خطی } AX=B \text{ باشد. اگر دترمینان } A \text{ غیرصفر باشد}$$

می‌توانیم مقدار x_i را با فرمول کرامر به دست آوریم:

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$$

ماتریس A_i همان ماتریس A است که به جای ستون i ام آن مقادیر B را قرار داده‌ایم.

مثال: این دستگاه معادلات خطی را با فرمول کرامر حل کنید.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 2 \\ x_1 + 4x_2 = 12 \end{cases}$$

پاسخ:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 12 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{44}{11} = 4 \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 12 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{22}{11} = 2$$



پایان باشید

پایان فصل دوم