

موسسه بابان

راهیان ارشد و دکتری انتشارات بابان

جبر خطی

فصل اول: بردارها و ماتریس‌ها

(ویژه کنکور ارشد و دکتری ۱۴۰۶)

ویژه داوطلبان کنکور ارشد و دکتری مهندسی کامپیوتر و علوم کامپیوتر

براساس کتب مرجع

دیوید سی. لی، استیون آر. لی، جودی جی. مک‌دونالد، فیلیپ ان. کلاین، بن نوبل، جیمز دبلیو. دنیل

ابوالفضل گیلک

بسم الله الرحمن الرحيم

مبانی ماتریس ها و جبر خطی

بخش اول تا هشتم از تدریس فصل اول

ابوالفضل گیلک

فصل اول: بردار و ماتریس

- میدانها
- بردارها
- ماتریس ها
- معادلات ماتریسی
- دستگاه معادلات خطی
- استقلال خطی

بردارها و ماتریس‌ها

1

میدان

- مجموعه ناتهی F با دو عمل جمع و ضرب را میدان می‌نامیم هرگاه این شرایط برقرار باشند:
- نسبت به جمع و ضرب بسته باشد.
 - هر دو عمل جمع و ضرب شرکت‌پذیر باشند.
 - هر دو عمل جمع و ضرب خاصیت جابجایی داشته باشند (آبلی باشند).
 - F دارای عضو خنثی جمع و عضو خنثی ضرب باشد که با 0_F و 1_F نشان داده می‌شوند.
 - هر $x \in F$ دارای قرینه جمعی $-x \in F$ باشد.
 - هر $x \in F - \{0\}$ دارای وارون $x^{-1} \in F$ باشد.
 - برای هر $x, y, z \in F$ داشته باشیم: $x(y + z) = xy + xz$ و $(y + z)x = yx + zx$.
 - $0_F \neq 1_F$.

شش ویژگی اول را می‌توان به این شکل خلاصه کرد:

الف: $(F, +)$ گروه آبلی باشد.

ب: $(F - \{0\}, \times)$ گروه آبلی باشد.

مثال: مجموعه اعداد صحیح با جمع و ضرب معمولی اعداد یک میدان نیست. زیرا در $(\mathbb{Z}, +, \times)$ بسیاری از عناصر، وارون ندارند. برای مثال $2 \in \mathbb{Z}$ اما $2^{-1} = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

مثال: مجموعه اعداد گویا با جمع و ضرب معمولی اعداد یک میدان است. در واقع $(\mathbb{Q}, +, \times)$ کوچکترین میدان نامتناهی است.

مثال: میدان‌های نامتناهی معروف عبارتند از: مجموعه اعداد گویا، اعداد حقیقی، و اعداد مختلط.

$$(\mathbb{Q}, +, \times), (\mathbb{R}, +, \times), (\mathbb{C}, +, \times)$$

در میدان اعداد مختلط داریم:

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

$$(a + ib) \times (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

میدان متناهی $\mathbb{Z}_p$

به ازای هر عدد صحیح $n \geq 0$ مجموعه $\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{n-1}\}$ با اعمال جمع و ضرب به پیمانه n یک حلقه است اما فقط برای اعداد اول p مجموعه $\mathbb{Z}_p$ یک میدان است.

مثال: میدان $\mathbb{Z}_3$:

در میدان سه عضوی $\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ اعمال جمع و ضرب به پیمانه ۳ انجام می‌شود. به عبارتی $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}$ نماینده $3k, 3k+1, 3k+2$ هستند. $\bar{0}$ عضو خنثی جمع و $\bar{1}$ عضو خنثی ضرب است. در این میدان $\bar{0} = \bar{1} + \bar{2}$ پس $\bar{1}$ و $\bar{2}$ قرینه یکدیگر هستند. همچنین $\bar{1} \times \bar{2} = \bar{2}$ پس $\bar{2}$ وارونه $\bar{2}$ است.

مثال: میدان $\mathbb{Z}_2$:

در میدان دو عضوی $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ جمع و ضرب به پیمانه ۲ انجام می‌شود. $\mathbb{Z}_2$ کوچکترین میدان است. در این میدان $\bar{0} = \bar{1} + \bar{1}$ پس $\bar{1}$ قرینه خودش است.

مثال: حلقه $\mathbb{Z}_6$:

در ساختار جبری $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ جمع و ضرب به پیمانه ۶ انجام می‌شود. عدد اول نیست پس $\mathbb{Z}_6$ میدان نیست. برای مثال اگر دقت کنید عنصر $\bar{2}$ وارون ندارد. یعنی ضرب هیچ عنصری در $\bar{2}$ برابر با $\bar{1}$ نیست. در $\mathbb{Z}_6$ ضرب دو عنصر غیر صفر ممکن است صفر شود مثلاً $\bar{3} \times \bar{2} = \bar{0}$ در میدان‌ها هیچ‌گاه ضرب دو عنصر غیر صفر، برابر صفر نمی‌شود. $\mathbb{Z}_6$ یک حلقه هست اما یک میدان نیست.

مشخصه‌ی میدان:

کوچکترین عدد طبیعی n را که به ازای آن $x \in F$ داشته باشیم $nx = 0_F$ مشخصه‌ی میدان F می‌نامیم. مشخصه‌ی میدان متناهی $\mathbb{Z}_p$ عدد اول p است. برای هر $\bar{k} \in \mathbb{Z}_p$ داریم $p\bar{k} = \bar{0}$.

نکات مهم:

- میدان‌های نامتناهی $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ مشخصه طبیعی ندارند آنها را میدان‌های با مشخصه صفر می‌نامیم.
- علاوه بر میدان‌های متناهی دیگری نیز وجود دارند. اما هر میدان متناهی دارای p^m عضو است که p عددی اول و $m \geq 1$ است. برای مثال میدان 6 عضوی یا 15 عضوی وجود ندارد چون در تجزیه آنها بیش از یک عدد اول ظاهر می‌شود اما میدان‌های 25 و 32 عضوی وجود دارند. زیرا این اعداد توانی از یک عدد اول هستند.
- مشخصه هر میدان p^m عضوی عدد اول p است.

بردارها در F^n :

n تایی مرتب $\mathbb{R}^n \in X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ را یک بردار روی میدان F می‌نامیم. به صورت پیش فرض بردارها را ستونی

نمایش می‌دهیم. برای هر جفت بردار $X, Y \in \mathbb{R}^n$ و هر اسکالر $c \in \mathbb{R}$ ، عمل جمع بردارها و عمل ضرب اسکالر به این صورت تعریف می‌شود:

$$X + Y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}, \quad cX = \begin{bmatrix} cx_1 \\ cx_2 \\ \vdots \\ cx_n \end{bmatrix}$$

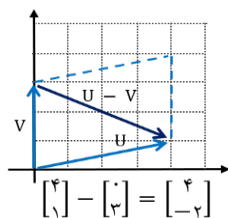
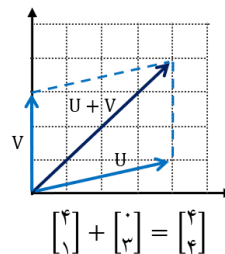
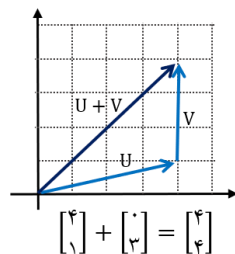
برداری که تمام مولفه‌هایش صفر هستند را بردار صفر می‌نامیم. بردار صفر، عضو خنثی عمل جمع است.

جمع بردارها خاصیت جابجایی دارد: $X + Y = Y + X$. هر بردار X دارای بردار قرینه $-X$ است.

نتیجه: $\mathbb{R}^n$ با عمل جمع بردارها یک گروه آبدی است.

نمایش هندسی جمع بردارها (یادآوری)

شکل سمت چپ روش مثلث و شکل سمت راست روش متوازی‌الاضلاع را نشان می‌دهد. در روش مثلث با شروع از نقطه دلخواه، بردار U را رسم می‌کنیم، از انتهای U بردار V را رسم می‌کنیم. برداری که نقطه شروع را به نقطه پایان برساند، $U + V$ است. در روش متوازی‌الاضلاع هر دو بردار را با شروع از یک نقطه شروع رسم می‌کنیم. از انتهای هر کدام، موازی با دیگری خطی رسم می‌کنیم، قطر متوازی‌الاضلاع که از نقطه شروع به راس مقابل می‌رسد $U + V$ است.



قطر دیگر متوازی‌الاضلاع که از انتهای V به انتهای U رسم می‌شود بردار $U - V$ است.

ترانهاد بردار:

به صورت پیش‌فرض، بردارها را به شکل ستونی نشان می‌دهیم. عملگر ترانهاد، برای تبدیل نمایش ستونی به سطری یا بالعکس استفاده می‌شود:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \Rightarrow X^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$$

ضرب داخلی بردارها:

ضرب داخلی (نقطه‌ای) بردارهای X و Y را با $X \cdot Y$ یا $\langle X, Y \rangle$ نشان می‌دهیم و به این صورت تعریف می‌شود:

$$X \cdot Y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

حاصل ضرب داخلی دو بردار، یک اسکالر است ضرب نقطه‌ای را به صورت $X^T Y$ نیز نشان می‌دهیم.

مثال:

$$X = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow X \cdot Y = X^T Y = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 10 + 12 + 2 = 24$$

ضرب داخلی بردارها خاصیت جابجایی دارد:

$$X \cdot Y = Y \cdot X$$

توجه: روی میدان اعداد مختلط ضرب داخلی به این صورت تعریف می‌شود:

$$X \cdot Y = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + \dots + x_n \bar{y}_n$$

$\bar{y}$ مزدوج عدد مختلط y است. مثلاً:

$$X = \begin{bmatrix} 2 - 3i \\ 10 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 3 + 2i \\ 1 - i \end{bmatrix} \Rightarrow X \cdot Y = (2 - 3i)(3 - 2i) + (10)(1 + i) = 10 - 3i$$

اندازه بردار (نرم بردار)

در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ اندازه بردار X را با $\|X\|$ نشان می‌دهیم و از این رابطه به دست می‌آید:

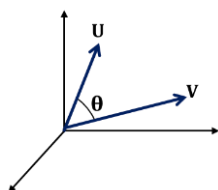
$$\|X\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

بین اندازه بردار، و ضرب داخلی این رابطه وجود دارد:

$$\|X\|^2 = X \cdot X$$

توجه: نرم یا اندازه بردار را به شکل های دیگری نیز می‌توان تعریف کرد. در برخی فضاهای ریاضی، برای مثال در فضای L^p نرم بردار به صورت $\|X\|_p = (x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p)^{\frac{1}{p}}$ تعریف می‌شود. فضاها و نرم‌های دیگری نیز وجود دارند که به برخی از آنها در مباحث کاربردی جبرخطی و جبرخطی عددی مورد استفاده قرار می‌گیرند. در حال حاضر تمرکز ما بر فضای $\mathbb{R}^n$ با نرم اقلیدسی است.

ویژگی‌های ضرب داخلی



- زاویه بین دو بردار

- اگر θ زاویه حاده بین دو بردار U و V باشد داریم:

$$U \cdot V = \|U\| \|V\| \cos \theta$$

- تعامد: بردارهای غیرصفر U و V برهم عمودند اگر و تنها اگر $U \cdot V = 0$.

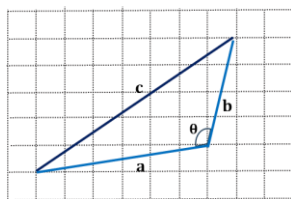
- نامساوی شوارتز: از آنجا که $|\cos \theta| \leq 1$ برای هر جفت بردار U و V داریم:

$$|U \cdot V| \leq \|U\| \|V\|$$

- نامساوی مثلث: با توجه به معنای هندسی اندازه بردار داریم:

$$\|U+V\| \leq \|U\| + \|V\|$$

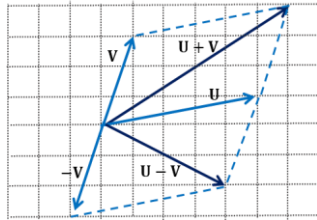
قاعده‌ی کسینوس:



به شکل توجه کنید. ضلع روبرو به زاویه θ از این رابطه به دست می‌آید:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$

برای $\theta = \frac{\pi}{2}$ قضیه فیثاغورث حاصل می‌شود.



نتیجه:

اگر θ زاویه حاده بین بردارهای U و V باشد داریم:

$$\|U + V\|^2 = \|U\|^2 + \|V\|^2 + 2\|U\|\|V\|\cos\theta$$

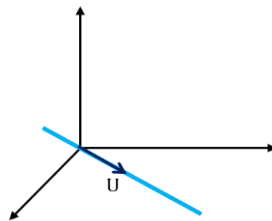
$$\|U - V\|^2 = \|U\|^2 + \|V\|^2 - 2\|U\|\|V\|\cos\theta$$

ترکیب خطی:

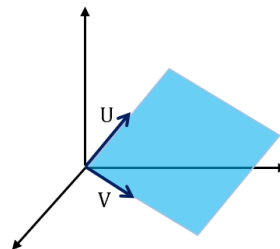
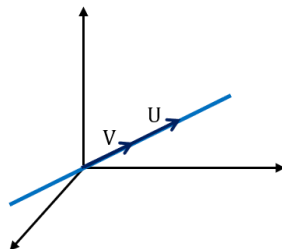
بردارهای $U_1, U_2, \dots, U_m$ و اسکالرهای $c_1, c_2, \dots, c_m$ را در نظر بگیرید. $c_1 U_1 + c_2 U_2 + \dots + c_m U_m$ را یک ترکیب خطی از این بردارها می‌نامیم.

سه مساله در فضای $\mathbb{R}^3$:

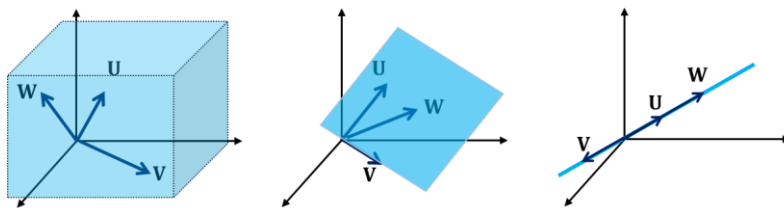
فرض کنیم $U, V, W \in \mathbb{R}^3$ سه بردار غیرصفر باشند. مجموعه همه ترکیبهای خطی cU تشکیل دهنده چه شکلی در فضا است؟ همین مساله برای مجموعه همه ترکیبهای $aU + bV$ و مجموعه همه ترکیبهای $aU + bV + cW$ چه پاسخی دارد؟
۱: برای بردار غیرصفر $U \in \mathbb{R}^3$ مجموعه همه ترکیبهای cU خطی گذرنده از مبدأ و شامل U است.



۲: برای بردارهای غیرصفر $U, V \in \mathbb{R}^3$ مجموعه ترکیبهای $aU + bV$ صفحه گذرنده از مبدأ و شامل U و V است (شکل راست)، البته اگر U و V مضرب هم باشند، به جای صفحه، خطی گذرنده از مبدأ و شامل U و V به دست می‌آید (شکل چپ).



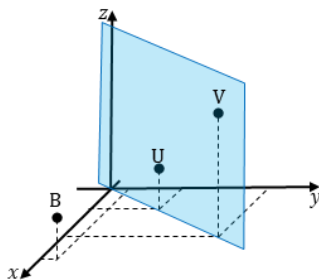
۳: برای بردارهای غیرصفر $U, V, W \in \mathbb{R}^3$ مجموعه همه ترکیبهای $aU + bV + cW$ تمام فضای $\mathbb{R}^3$ است (شکل راست)، البته اگر یکی از آنها ترکیب خطی دوتای دیگر باشد صفحه گذرنده از آنها و مبدأ به دست می‌آید (شکل وسط)، و اگر هر سه بردار مضرب یکدیگر باشند، خط گذرنده از آنها و مبدأ به دست می‌آید (شکل چپ).



مثال: به شکل زیر توجه کنید. مجموعه همه ترکیبهای خطی بردارهای $U = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $V = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ عبارت

است از همه ترکیبهای به فرم $aU + bV = \begin{bmatrix} a + 2b \\ 2a + 4b \\ a + 3b \end{bmatrix}$ و یک صفحه را تشکیل می‌دهد (صفحه‌ی

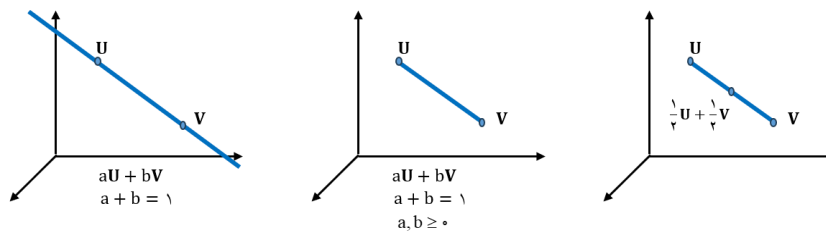
$y = 2x$). دستگاه $\begin{bmatrix} a + 2b \\ 2a + 4b \\ a + 3b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ جواب ندارد زیرا نقطه $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ روی این صفحه قرار ندارد.



ترکیب‌های خطی محدب:

فرض کنید اگر U و V دو نقطه متمایز از فضای $\mathbb{R}^3$ باشند که انتهای دو بردار غیر هم‌راستا هستند.

الف: مجموعه ترکیب‌های خطی $aU + bV$ که در آنها $a + b = 1$ ، خط گذرنده از U و V است.

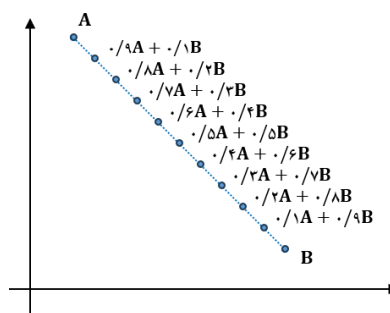


ب: مجموعه ترکیب‌های خطی $aU + bV$ که در آنها $a + b = 1$ و $0 \leq a, b \leq 1$ ، پاره خط UV را تشکیل می‌دهند. به آنها ترکیبات خطی محدب U و V می‌گوییم.

پ: برای مثال به ازای $a = b = \frac{1}{2}$ ترکیب خطی $\frac{1}{2}U + \frac{1}{2}V$ نقطه وسط پاره خط UV را نشان می‌دهد.

مثال:

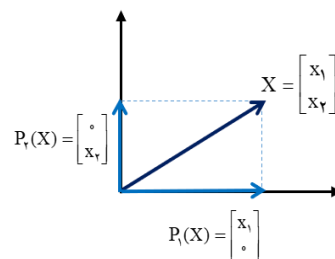
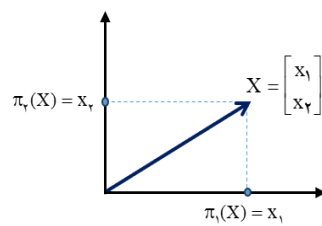
در شکل زیر تعدادی از ترکیب‌های خطی محدب A و B نشان داده شده‌اند. روی پاره خط AB همیشه ضرایب نامنفی هستند و مجموع آنها یک است. هرچه ضریب A بزرگتر شود به آن نزدیکتر می‌شویم.



تصویر (Projection)

برای هر $1 \leq i \leq n$ نگاشت $\pi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ از هر بردار مولفه‌ی i ام آن را می‌دهد. مثلاً $\pi_r \begin{bmatrix} x_1 \\ x_r \end{bmatrix} = x_r$.

نگاشت $P_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ هر بردار را به تصویرش روی محور i ام تبدیل می‌کند. مثلاً $P_r \begin{bmatrix} x_1 \\ x_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_r \end{bmatrix}$.



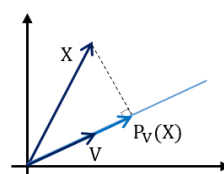
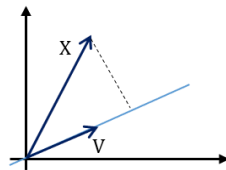
تصویر X در امتداد V :

در حالت کلی‌تر، تصویر بردار X در امتداد بردار V از این رابطه به دست می‌آید:

$$P_V(X) = \frac{\langle V, X \rangle}{\langle V, V \rangle} V$$

به عبارتی داریم:

$$P_V(X) = \frac{V^T X}{V^T V} V$$



نگاشت تصویر خودتوان است به این معنا که $P_V P_V(X) = P_V(X)$ در واقع $P_V^2 = P_V$.

تصویر یک بردار بر صفحه

گفتیم که تصویر X بر خط ℓ نزدیکترین نقطه به X روی خط است. به همین دلیل، پای عمود است و از این رابطه به دست می‌آید: (بردار V بردار هادی خط ℓ است، به نوعی نماینده خط ℓ است).

$$P_V(X) = \frac{\langle V, X \rangle}{\langle V, V \rangle} V = \frac{V^T X}{V^T V} V$$

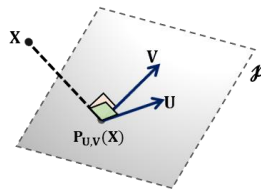
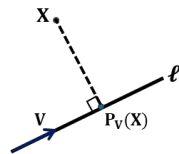
با استفاده از ویژگی جابجایی ضرب اسکالر، می‌توانیم فرمول بالا را به این شکل بنویسیم:

$$P_V(X) = V(V^T V)^{-1} V^T X$$

این فرم از این نظر جالب است که به شکل ضرب یک عبارت جبری در X نوشته شده است. حالا می‌خواهیم مشابه این فرمول را برای یافتن تصویر X بر یک صفحه بنویسیم.

فرض کنیم U و V دو بردار غیرصفر باشند که ترکیبهای خطی آنها صفحه ρ را تشکیل می‌دهد. تصویر X بر صفحه ρ نزدیکترین نقطه به X روی صفحه ρ است. ماتریس $A = [U|V]$ می‌تواند نماینده آن صفحه باشد، تصویر X بر ρ از این رابطه به دست می‌آید:

$$P_A(X) = A(A^T A)^{-1} A^T X$$



مثال: تصویر نقطه $X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ بر صفحه ρ که از نقاط $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ و مبدأ می‌گذرد کدام است؟

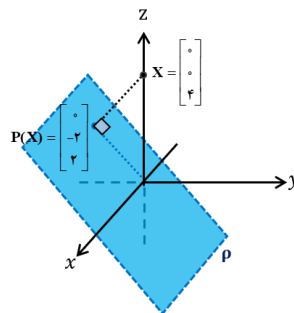
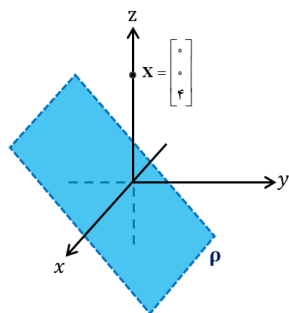
پاسخ: می‌دانیم $P_A(\mathbf{X}) = A(A^T A)^{-1} A^T \mathbf{X}$ ابتدا عبارت جبری $A(A^T A)^{-1} A^T$ را محاسبه کنیم.

$$A = [U \mid V] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow (A^T A)^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A(A^T A)^{-1} A^T = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$P_A(\mathbf{X}) = A(A^T A)^{-1} A^T \mathbf{X} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$



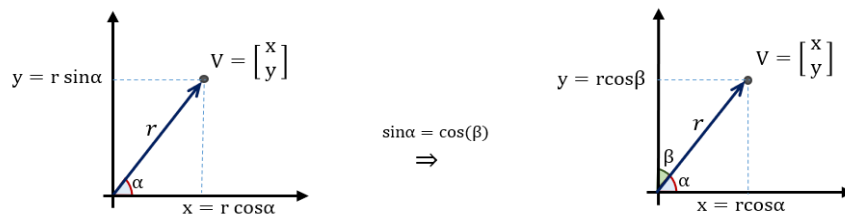
مختصات قطبی

در فضای $\mathbb{R}^2$ بردار $V = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ را با شروع از مبدأ در نظر بگیرید. اندازه این بردار $r = \|V\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ است. اگر زاویه آن با جهت مثبت محور افقی α باشد بردار V با داشتن زوج (r, α) مشخص می‌شود. این روابط نیز برقرار است:

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \sin \alpha$$

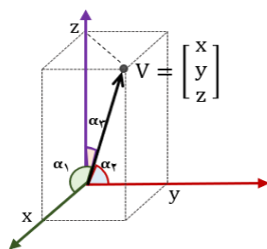
از طرفی زاویه V با جهت مثبت محور قائم β است و $\sin \alpha = \cos \beta$ پس می‌توان نوشت:

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \cos \beta$$



کسینوس‌های هادی

در فضای $\mathbb{R}^3$ فرض کنیم $V = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^T$ برداری دلخواه و $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ اندازه آن و $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ و α_p زوایای آن با جهات مثبت محورها باشند. در این صورت:



$$x = r \cos \alpha_1$$

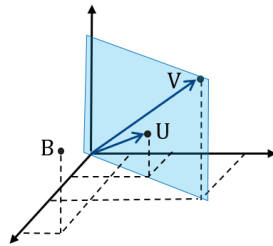
$$y = r \cos \alpha_2$$

$$z = r \cos \alpha_3$$

مثال: به شکل زیر دقت کنید. بردارهای $U = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $V = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ هم‌راستا نیستند و مجموعه همه ترکیب‌های

خطی آنها یعنی ترکیب‌های $aU + bV = \begin{bmatrix} a + 2b \\ 2a + 4b \\ a + 3b \end{bmatrix}$ یک صفحه تشکیل می‌دهد. (صفحه‌ی $y = 2x$).

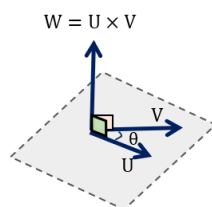
دستگاه $\begin{bmatrix} a + 2b \\ 2a + 4b \\ a + 3b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ جواب ندارد زیرا نقطه $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ روی این صفحه قرار ندارد.



ضرب خارجی بردارها

ضرب خارجی دو بردار $U = [u_1 \ u_2 \ u_3]^T$ و $V = [v_1 \ v_2 \ v_3]^T$ برداری است عمود بر هر دوی آنها و از این رابطه به دست می‌آید:

$$U \times V = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = [u_2 v_3 - u_3 v_2, \ u_3 v_1 - u_1 v_3, \ u_1 v_2 - u_2 v_1]^T$$

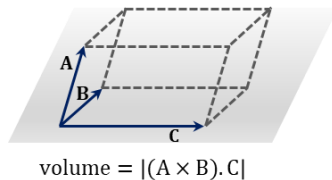


توجه:

- ضرب خارجی بردارها خاصیت جابجایی ندارد بلکه: $U \times V = -V \times U$
- اندازه ضرب خارجی، با $\sin \theta$ رابطه دارد: $\|U \times V\| = \|U\| \|V\| \sin \theta$

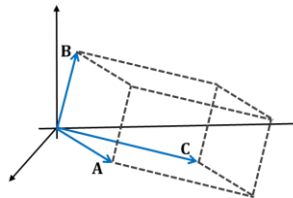
حجم متوازی‌السطوح

اگر بردارهای A ، B و C کنج یک جعبه (متوازی‌السطوح) را نشان دهند، حجم آن جعبه با قدرمطلق $(A \times B) \cdot C$ برابر است. این عبارت را ضرب سه‌گانه بردارها می‌نامیم.



مثال: حجم متوازی‌السطوحی که با بردارهای A ، B و C ساخته می‌شود چقدر است؟

$$\begin{aligned} A &= i + 2j - k \\ B &= -2i + 3k \\ C &= 7j - 4k \end{aligned}$$



پاسخ:

$$A \times B = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 4 \end{bmatrix}^T, C = \begin{bmatrix} 0 & 7 & -4 \end{bmatrix}^T$$

$$\Rightarrow (A \times B) \cdot C = 0 - 7 - 16 = -23 \Rightarrow \text{volume} = 23$$

ماتریس‌ها

آرایه‌ای دوبعدی با m سطر و n ستون از عناصر میدان F را یک ماتریس $m \times n$ روی F می‌نامیم. عناصر ماتریس را درایه‌های آن می‌نامیم. ماتریس‌ها از پرکاربردترین اشیاء ریاضی هستند. مجموعه همه ماتریس‌های $m \times n$ روی میدان F را با $M_{m \times n}(F)$ نشان می‌دهیم.

جمع و تفریق ماتریس‌ها:

جمع و تفریق دو ماتریس فقط برای ماتریس‌های با ابعاد یکسان تعریف می‌شود و در آن درایه‌های نظیر با هم جمع یا تفریق می‌شوند.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} \end{bmatrix}$$

ماتریس صفر که تمام درایه‌هایش صفر است، عضو خنثی عمل جمع ماتریس‌هاست.

ضرب اسکالر در ماتریس:

برای هر اسکالر $c \in F$ ، ماتریس cA با ضرب c در تمام درایه‌های A به دست می‌آید.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow cA = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & ca_{13} \\ ca_{21} & ca_{22} & ca_{23} \\ ca_{31} & ca_{32} & ca_{33} \end{bmatrix}$$

ضرب ماتریس‌ها:

ماتریس AB فقط وقتی تعریف شده است که تعداد ستون‌های A با تعداد سطرهای B برابر باشد. نتیجه ضرب ماتریس $A_{n \times m}$ در ماتریس $B_{m \times k}$ ماتریس $C_{n \times k}$ است. درایه c_{ij} برابر است با ضرب داخلی سطر i ام A در ستون j ام B :

$$c_{ij} = \sum_{p=1}^m a_{ip} b_{pj}$$

این رابطه را به این صورت هم می‌نویسند:

$$(AB)_{ij} = A_i \cdot B^j$$

که A_i سطر i ام A و B^j ستون j ام B است.

مثال:

$$A_{r \times r} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, B_{r \times 1} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} \Rightarrow (AB)_{r \times 1} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} \end{bmatrix}$$

توجه: اگر A ماتریس مربع باشد توان‌های آن چنین تعریف می‌شوند:

$$A^0 = AA, A^r = AA^r, \dots, A^k = AA^{k-1}$$

ماتریس همانی:

ماتریس همانی، ماتریس مربعی است که درایه‌های قطر اصلی آن ۱ و سایر درایه‌ها صفر هستند.

$$I_{r \times r} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, I_{r \times r} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

از دلتای کرونگر برای نشان دادن درایه‌های ماتریس همانی استفاده می‌کنیم:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}, I_{n \times n} = (\delta_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$$

برای ماتریس‌های $m \times m$ ، ماتریس $I_{m \times m}$ از هر دو طرف، عضو خنثی عمل ضرب است:

$$A_{m \times m} I_{m \times m} = A_{m \times m}, I_{m \times m} A_{m \times m} = A_{m \times m}$$

برای ماتریس‌های $m \times n$ ماتریس $I_{n \times n}$ از راست و $I_{m \times m}$ از چپ به صورت خنثی ضرب می‌شوند.

$$A_{m \times n} I_{n \times n} = A_{m \times n}, I_{m \times m} A_{m \times n} = A_{m \times n}$$

توجه:

ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابجایی ندارد. حتی وقتی AB و BA هر دو تعریف شده باشند، لزوماً یکسان نیستند و در اغلب اوقات $AB \neq BA$ به همین دلیل $(AB)^n \neq A^n B^n$. برای مثال:

$$(AB)^r = ABABAB \neq A^r B^r$$

البته در حالات خاص برخی ماتریس‌های مربع با هم جابجا می‌شوند.

مثال: به نمونه جالب زیر توجه کنید:

$$A_{n \times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, B_{n \times n} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

در ماتریس A ستون اول، و در ماتریس B سطر اول، ثابت یک است و سایر درایه‌ها صفر هستند. با

محاسبه AB و BA داریم:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

مثال: ضرب ماتریس‌های با درایه‌هایی از میدان اعداد مختلط:

$$A = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 2 & -i \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 1 & 2i+1 \end{bmatrix} \Rightarrow AB = \begin{bmatrix} 0 & 2i+1 \\ i & 2-i \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} -1 & i \\ 5i+2 & 3-i \end{bmatrix}$$

توجه:

ضرب ماتریس‌ها شرکت‌پذیر است. ضرب ماتریس‌ها روی جمع آنها توزیع‌پذیر است.

$$A(BC) = (AB)C$$

$$A(B+C) = AB+AC$$

$$(B+C)A = BA+CA$$

اثر ماتریس (trace):

برای ماتریس مربع $A_{n \times n}$ مجموع عناصر روی قطر اصلی را رد یا اثر ماتریس می‌نامیم:

$$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

نکته:

- تابع trace خاصیت جمعی دارد یعنی: $\text{tr}(A+B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$
- اما خاصیت ضربی ندارد یعنی $\text{tr}(AB) \neq \text{tr}(A)\text{tr}(B)$
- برای هر جفت ماتریس مربع داریم: $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$
- برای هر اسکالر $c \in F$ داریم: $\text{tr}(cA) = c\text{tr}(A)$

مثال:

مشاهده کنید که AB و BA برابر نیستند با اینحال trace آنها برابر است:

$$A = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 2 & -i \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 1 & 2i+1 \end{bmatrix} \Rightarrow AB = \begin{bmatrix} 0 & 2i+1 \\ i & 2-i \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} -1 & i \\ 5i+2 & 3-i \end{bmatrix}$$

$$\text{tr}(AB) = 2-i, \text{tr}(BA) = 2-i$$

نکته:

- بردارهای دلخواه $X, Y \in \mathbb{R}^n$ را به عنوان دو ماتریس ستونی در نظر بگیریم. حاصل $X^T Y$ یک اسکالر است و همان ضرب داخلی دو بردار است:

$$X^T Y = X \cdot Y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

- اما XY^T ماتریسی $n \times n$ است، با این ویژگی:

$$\text{tr}(XY^T) = X^T Y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

- می‌دانیم که $X^T X$ یک اسکالر است: $X^T X = \|X\|^2$. اما XX^T ماتریسی $n \times n$ است. البته این ماتریس یک ویژگی مهم دارد:

$$\text{tr}(XX^T) = \|X\|^2$$

$$\text{tr}((XX^T)^k) = \|X\|^{2k}$$

ماتریس مثلثی:

در ماتریس مربع $A_{n \times n}$ درایه سطر i ، ستون j را a_{ij} می‌نامیم. روی قطر اصلی، $i = j$ است، زیر قطر اصلی $i > j$ است و بالای قطر اصلی $i < j$ است. اگر درایه‌های پایین قطر همه صفر باشند، ماتریس را بالامثلثی گوئیم، اگر درایه‌های پایین و روی قطر صفر باشند، ماتریس را اکیداً بالامثلثی گوئیم. به طور مشابه ماتریس پایین مثلثی تعریف می‌شود.

مثال: ماتریس A بالامثلثی است. ماتریس B پایین مثلثی از نوع اکید است.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس قطری:

ماتریس مربعی که درایه‌های غیرقطری‌اش همه صفر باشند ماتریس قطری نامیده می‌شود.

مثال: ماتریس‌های $I_{3 \times 3}$ و $D_{3 \times 3}$ قطری هستند.

$$D_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \quad I_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس اسکالر:

ماتریس قطری با درایه‌های قطری $d_1, d_2, \dots, d_n$ را با علامت $\text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ نشان می‌دهیم. اگر همه درایه‌های قطر برابر باشند به آن، ماتریس اسکالر می‌گوییم.

مثال:

ماتریس $\text{diag}(1, -2, 4)$ و ماتریس اسکالر $\text{diag}(2, 2, 2)$ را نشان داده‌ایم.

$$\text{diag}(1, -2, 4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{diag}(2, 2, 2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

توجه:

حاصلضرب دو ماتریس بالامثلثی، یک ماتریس بالامثلثی است. حاصلضرب دو ماتریس پایین‌مثلثی، یک ماتریس پایین‌مثلثی است. حاصلضرب دو ماتریس قطری، یک ماتریس قطری است.

ماتریس تبدیلات هندسی

برخی ماتریس‌ها، نماینده یک تبدیل هندسی هستند. برای مثال قرینه نقطه $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ نسبت به محور افقی،

نقطه $F(X) = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$ است. ضرب ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ در X ما را به $F(X)$ می‌رساند:

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = F(X)$$

یکی دیگر از تبدیلات هندسی که توسط ضرب ماتریس‌ها قابل انجام است دوران حول مبدأ است.

ماتریس دوران (rotation)

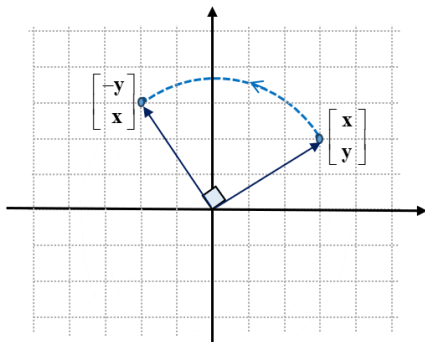
هرگاه بخواهیم نقطه $P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ را حول مبدأ به اندازه زاویه α دوران دهیم، کافیه آن را در ماتریس

$R(\alpha)$ ضرب کنیم.

$$R(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$R(\alpha)$ یک تبدیل هندسی است که باعث دوران حول مبدأ به اندازه زاویه α می‌شود.

مثال: در این شکل تاثیر $R(\frac{\pi}{4})$ بر نقطه $P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ را مشاهده می‌کنید.



$$R\left(\frac{\pi}{4}\right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$$

توجه:

با استفاده از مفهوم دوران اگر تبدیلات $R(\alpha)$ و $R(\beta)$ پشت سرهم انجام شود مانند آن است که دوران به اندازه $\alpha + \beta$ انجام شود.

$$R(\beta)R(\alpha) = R(\alpha)R(\beta) = R(\alpha + \beta)$$

به عبارتی:

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) \\ -\sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{bmatrix}$$

ماتریس خودتوان: ماتریس مربع A خودتوان است هرگاه $A^T = A$.

ماتریس پوچ توان: ماتریس مربع A پوچ توان است هرگاه $\exists n \ A^n = 0$.

مثال - هرگاه $AB = A$ و $BA = B$ کدام گزینه صحیح است؟

(1) ماتریس‌های A و B ماتریس صفر هستند.

(2) ماتریس‌های A و B همانی هستند.

(3) ماتریس‌های A و B خودتوان هستند.

(4) ماتریس‌های A و B پوچ توان هستند.

پاسخ: گزینه ۳

با شرایط داده شده خودتوان بودن ماتریس‌ها ثابت می‌شود:

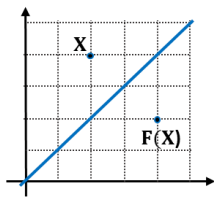
$$A^2 = AA = ABAB = A(BA)B = ABB = AB = A$$

$$B^2 = BB = BABA = B(AB)A = BAA = BA = B$$

سایر گزینه‌ها لزوماً درست نیستند. برای مثال A و B می‌توانند ماتریس صفر باشند، می‌توانند ماتریس همانی باشند. می‌توانند ماتریس‌هایی باشند که فقط درایه سطر اول و ستون اول آنها ۳ و سایر درایه‌ها صفر است.

مثال: برای هر $X \in \mathbb{R}^2$ نقطه $F(X)$ قرینه X نسبت به نیمساز ربع اول و سوم است. ماتریس مربع A

چنان است که: $AX = F(X)$. مقدار $\text{tr}(A^2)$ کدام است؟



(1) ۷

(2) ۲

(3) ۱

(4) ۰

پاسخ: گزینه ۴

$$AX = F(X) \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a=0 & b=1 \\ c=1 & d=0 \end{matrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{2k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I, A^{2k+1} = A$$

$$\Rightarrow \text{tr} A^{2k} = 2, \text{tr} A^{2k+1} = 0$$

مثال: ماتریس X خودتوان است هرگاه $X^T = X$. فرض کنید A و B دو ماتریس حقیقی $n \times n$ باشند

طوری که $A, B, A+B$ خودتوان هستند. کدام صحیح است؟

(دکتری علوم ریاضی ۱۳۹۴)

$$(1) \operatorname{tr}(AB) = 0$$

$$(2) \operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$$

$$(3) I + A \text{ خودتوان است.}$$

$$(4) I + A - B \text{ خودتوان است.}$$

پاسخ: گزینه ۱

طبق فرض $A, B, A+B$ خودتوان هستند. پس:

$$\begin{cases} (A+B)^T = (A+B)(A+B) = A^T + AB + BA + B^T = A + AB + BA + B \\ (A+B)^T = A+B \end{cases}$$

$$\Rightarrow A + AB + BA + B = A + B \Rightarrow AB + BA = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{tr}(AB + BA) = 0 \Rightarrow \operatorname{tr}(AB) + \operatorname{tr}(BA) = 0$$

از طرفی $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ پس $\operatorname{tr}(AB) = 0$.

ماتریس وارون‌پذیر

ماتریس مربع A را وارون‌پذیر (نامنفرد) می‌نامیم هرگاه ماتریس B موجود باشد طوری که:

$$AB = I, BA = I$$

ماتریس B را وارون A می‌نامیم، ماتریس A نیز وارون B است:

$$A = B^{-1}, B = A^{-1}$$

وارون A در صورت وجود، منحصر به فرد است. تشخیص وارون‌پذیری و یافتن A^{-1} در قسمت‌های بعدی مطالعه می‌شوند.

توجه:

وارون چپ و وارون راست ماتریس مربع، در صورت وجود، یکسان هستند. یعنی اگر $AB = I$ باشد آنگاه $BA = I$.

ترانهایه ماتریس:

اگر سطرهای A را به ستون‌های آن تبدیل کنیم ترانهایه A به دست می‌آید که آن را با A^t یا A' نشان می‌دهیم. اگر A ماتریسی $n \times m$ باشد، ترانهایه آن $m \times n$ است. اگر a'_{ij} درایه سطر i ستون j ماتریس ترانهایه باشد داریم: $a'_{ij} = a_{ji}$.

ویژگی‌های ترانهایه: برای ماتریس‌های A و B و اسکالر $c \in F$ داریم:

$$\begin{aligned}(A^t)^t &= A \\ (cA)^t &= cA^t \\ (A+B)^t &= A^t + B^t \\ (AB)^t &= B^t A^t \\ (A^{-1})^t &= (A^t)^{-1}\end{aligned}$$

توجه:

- در حالت کلی اگر $AB = 0$ نمی‌توان نتیجه گرفت که $A = 0$ یا $B = 0$. البته اگر A معکوس پذیر باشد از $AB = 0$ نتیجه می‌شود $B = 0$.
- برای هر ماتریس مربع اگر $AA^t = 0$ آنگاه $A = 0$.

ماتریس متقارن:

ماتریس A را متقارن گوئیم هرگاه $A^t = A$. در چنین ماتریسی $a_{ji} = a_{ij}$ است.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & -3 \end{bmatrix} \quad A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

ماتریس پادمتقارن:

ماتریس A را پادمتقارن گوئیم هرگاه $A^t = -A$. در چنین ماتریسی $a_{ji} = -a_{ij}$ است، پس روی قطر اصلی آن همه درایه‌ها باید صفر باشند.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad A^t = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \\ -5 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس خودالحاق (هرمیتی):

فرض کنیم ماتریس $A \in M_n(\mathbb{C})$ درایه‌های مختلط داشته باشند، مزدوج A را با علامت $\bar{A}$ نشان می‌دهیم و درایه‌هایش مزدوج مختلط درایه‌های A هستند:

$$A = \begin{bmatrix} 1+3i & 5 \\ -2i & 2-i \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{A} = \begin{bmatrix} 1-3i & 5 \\ +2i & 2+i \end{bmatrix}$$

اکنون ماتریس A را خودالحاق (هرمیتی) گوئیم هرگاه: $A^t = \bar{A}$. به عبارتی $a_{ji} = \bar{a}_{ij}$. درایه‌های قطری چنین ماتریسی باید اعداد حقیقی باشند. درایه‌های بالا و پایین قطر نیز دوه دو مزدوج هم هستند. مثال‌ها:

$$A = \begin{bmatrix} a & x+iy \\ x-iy & b \end{bmatrix}, A^t = \begin{bmatrix} a & x-iy \\ x+iy & b \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \bar{A}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2+i & 2i \\ 2-i & 3 & 3-2i \\ -2i & 3+2i & 1 \end{bmatrix}, B^t = \begin{bmatrix} 2 & 2-i & -2i \\ 2+i & 3 & 3+2i \\ 2i & 3-2i & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^t = \bar{B}$$

نکته: هر ماتریس خودالحاق، نرمال است یعنی برای ماتریس خودالحاق داریم: $AA^t = A^t A$.

نکته: برای هر ماتریس A ، اگر $AA^t = 0$ آنگاه $A = 0$ است.

مثال: فرض کنید A و B دو ماتریس مربع باشند و $AB = A^t + A + I$. در این صورت کدام صحیح است؟
(دکتری علوم ریاضی ۹۷)

$$AB = I \quad (1)$$

$$AB = BA \quad (2)$$

$$\det A = \det B = 1 \quad (3)$$

$$AB = AB^t \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۲

$$AB = A^t + A + I \Rightarrow AB - A^t - A = I \Rightarrow A(B - A - I) = I$$

$A(B - A - I) = I$ پس $(B - A - I)A = I$. چون A ماتریس مربع است.

$$(B - A - I)A = I \Rightarrow BA - A^t - A = I \Rightarrow BA = A^t + A + I$$

$$\Rightarrow BA = AB$$

تمرین: گزاره‌های درست را مشخص کنید؟ برای نادرست‌ها مثال نقض بیاورید.

پاسخ: گزاره‌های درست را با ✓ و گزاره‌های نادرست را با ✗ مشخص کرده‌ایم.

- اگر A و B معکوس پذیر باشند، $A+B$ نیز معکوس پذیر است. ✗

$$A+B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- اگر A و B معکوس پذیر باشند، AB نیز معکوس پذیر است. ✓

- اگر A و B معکوس پذیر باشند، $(AB^{-1})^t$ نیز معکوس پذیر است. ✓

- اگر $A^3 = 5I$ آنگاه A معکوس پذیر است. ✓

- اگر $B \neq 0$ و $AB=B$ آنگاه A معکوس پذیر است. ✗

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow AB=B$$

$$A = \begin{bmatrix} 0/5 & 0/5 \\ 0/5 & 0/5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow AB=B$$

- اگر $A_{n \times n}$ وارون پذیر نباشد، آنگاه برای هر $B_{n \times n}$ ماتریس AB وارون ندارد. ✓

- اگر ماتریس وارون پذیر A پادمتقارن باشد آنگاه A^{-1} نیز پادمتقارن است. ✓

- اگر ماتریس وارون پذیر A متقارن باشد آنگاه A^{-1} نیز متقارن است. ✓

- اگر ماتریس وارون پذیر A بالامتثلی باشد آنگاه A^{-1} پایین‌مثلی است. ✓

- اگر $A^2 = 0$ آنگاه A معکوس پذیر نیست. ✓

- اگر $A^2 = A$ آنگاه $A=0$ یا $A=I$. ✗

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = A, A \neq I, A \neq 0$$

- اگر $A \neq 0$ و $AB=AC$ آنگاه $B=C$ است. ✗

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow AB=AC, B \neq C$$

- برای هر ماتریس $A_{n \times n}$ ماتریس $A+A^t$ متقارن است. ✓

- برای هر ماتریس $A_{n \times n}$ ماتریس $A-A^t$ پادمتقارن است. ✓

- هر ماتریس $A_{n \times n}$ مجموع یک ماتریس متقارن و یک ماتریس پادمتقارن است. ✓

$$A = \frac{1}{2}(A+A^t) + \frac{1}{2}(A-A^t) \text{ علت درستی جمله فوق آن است که:}$$

ماتریس‌های بلوکی

هنگامی که ماتریسی را به فرم $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ می‌نویسیم که هر کدام از اجزاء A, B, C, D یک ماتریس باشد، M را ماتریس بلوکی می‌نامیم. استفاده از بلوک‌ها و تفکیک ماتریس به بلوک‌های دلخواه گاهی اوقات باعث سادگی محاسبات می‌شود.

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 2 & 3 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 7 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

ضرب ماتریس‌های بلوکی به این صورت انجام می‌شود:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AE + BG & AF + BH \\ CE + DG & CF + DH \end{bmatrix}$$

تمرین: ماتریس A داده شده است. ماتریس A^2 کدام است؟

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

پاسخ: از این بلوک بندی استفاده کنیم:

$$B = [1], C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & C \\ D & E \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} BB + CD & BC + CE \\ DB + ED & DC + EE \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

به همین ترتیب با ضرب A فقط بلوک E دو برابر می‌شود. پس:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2^2 & -2^2 \\ 1 & -2^2 & 2^2 \end{bmatrix}$$

دترمینان (یادآوری)

دترمینان ماتریس‌های 2×2 و 3×3 را یادآوری می‌کنیم. در فصل بعد تابع دترمینان را مفصل‌تر بررسی می‌کنیم.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = ad - bc$$

برای ماتریس 3×3 طبق فرمول ساروس:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

برای مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = (20 + 0 + 12) - (8 + 0 + 50) = -26$$

دستگاه معادلات خطی

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

نمایش ماتریسی دستگاه معادلات خطی:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \Rightarrow AX = B$$

A را ماتریس ضرایب و B را ماتریس مقادیر سمت راست می‌نامیم. بردار $X \in \mathbb{R}^n$ جواب دستگاه است. در حالت کلی دستگاه ممکن است بدون جواب باشد، فقط یک جواب داشته باشد، یا بی‌نهایت جواب داشته باشد.

دستگاه معادلات خطی همگن

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

نمایش ماتریسی دستگاه معادلات خطی همگن:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow AX = 0$$

تفاوت دستگاه همگن با ناهمگن در آن است که همواره یک جواب بدیهی $X = 0$ دارد. البته ممکن است جواب‌های غیربدیهی نیز داشته باشد. دستگاه همگن یا جواب یکتای $X = 0$ دارد یا بیشمار جواب دارد.

ترکیب خطی چند معادله:

دو یا چند معادله را در نظر بگیرید. وقتی هر کدام از آنها را در ثابت دلخواه ضرب کرده و نتایج را جمع کنیم، یک ترکیب خطی از آنها به دست می‌آید. معادلات $2x_1 + 3x_2 = 1$ و $x_1 - 2x_2 + x_3 = 4$ را در نظر بگیرید. هر ترکیب خطی آنها چنین است:

$$c_1(2x_1 + 3x_2) + c_2(x_1 - 2x_2 + x_3) = c_1 + 4c_2$$

هم ارزی دستگاه‌های خطی هم‌ارز:

دو دستگاه معادلات خطی را هم‌ارز گوئیم هرگاه هر یک از معادلات دستگاه اول، ترکیب خطی از معادلات دستگاه دوم باشد و بالعکس. این رابطه باید دو طرفه باشد.

مثال: دو دستگاه معادلات خطی A و B را داریم:

$$A: \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 = -1 \end{cases} \quad B: \begin{cases} x_1 - 4x_2 = -7 \\ 4x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$$

در دستگاه A معادله اول را در 2- و معادله دوم را در یک ضرب کنیم و سپس جمع بزنیم اولین سطر B به دست می‌آید. اگر دو معادله A را جمع بزنیم دومین سطر B به دست می‌آید. هر کدام از معادلات B ترکیب خطی از معادلات A هستند.

همچنین هر کدام از معادلات A ترکیب خطی از معادلات B هستند. (از ضرایب $\pm \frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$ استفاده کنیم). پس این دستگاه‌ها هم‌ارزند.

آیا دستگاه‌های هم‌ارز، مجموعه جواب یکسانی دارند؟ آیا داشتن مجموعه جواب یکسان، به معنای هم‌ارزی دستگاه‌هاست؟ پاسخ را در قضیه زیر ببینید:

قضیه:

- 1: دستگاه‌های معادلات خطی هم‌ارز، جواب‌های یکسان دارند.
- 2: دستگاه‌های معادلات خطی همگن هم‌ارزند گر و تنها اگر جواب‌های یکسان داشته باشند.

تمرین: آیا دستگاه‌های خطی A و B هم‌ارز هستند؟

$$A: \begin{cases} -x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 0 \\ \frac{1}{4}x_1 + x_2 + \frac{5}{4}x_3 = 0 \end{cases} \quad B: \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

پاسخ: این دستگاه‌ها همگن هستند پس کفایت یکسان بودن جوابها را بررسی کنیم. بردار جواب $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

B است اگر و تنها اگر $x_1 = x_3$ و $x_2 = -3x_3$ پس مجموعه جواب دستگاه B همه بردارهای به فرم

است. با بررسی می‌بینیم که دستگاه A نیز دقیقا همین مجموعه جواب را دارد. پس این دستگاه‌ها هم‌ارز هستند.

اعمال سطری مقدماتی

اعمال سطری مقدماتی اقداماتی هستند که با انجام آنها روی یک دستگاه، به دستگاهی هم‌ارز خواهیم رسید در نتیجه مجموعه جواب دستگاه را تغییر نمی‌دهند. ما از این اعمال برای تبدیل دستگاه به دستگاهی هم‌ارز اما ساده‌تر استفاده می‌کنیم. اعمال سطری مقدماتی عبارتند از:

- 1- ضرب یک سطر در ثابت دلخواه غیر صفر
- 2- جمع کردن یک سطر با مضربی از سطری دیگر
- 3- جابجا کردن دو سطر با یکدیگر

نحوه استفاده از این اعمال برای حل دستگاه چنین است:

$$\begin{cases} 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

ماتریس ضرایب و ماتریس مقادیر سمت راست را در کنار هم به این صورت می‌نویسیم: $[A|B]$ به این ماتریس، ماتریس افزوده می‌گوییم.

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right]$$

اکنون با انجام اعمال سطری مقدماتی سعی می‌کنیم ماتریس ضرایب را به ماتریسی ساده‌تر (مثلاً ماتریس بالامثلثی یا قطری یا...) تبدیل کنیم. هر عملی روی سطرهای A انجام شود روی مقادیر B نیز اثر خواهد گذاشت.

توجه: در دستگاه معادلات خطی همگن نیازی به نوشتن ماتریس مقادیر سمت راست در ماتریس افزوده نداریم زیرا مقادیر آن همواره صفر باقی می‌مانند.

پیش از ادامه درس، منظورمان از ساده کردن ماتریس ضرایب را مشخص تر بیان می‌کنیم.

ماتریس تحویل شده سطری

اولین درایه‌ی غیرصفر در هر سطر را درایه پیشرو می‌نامیم. ماتریس $R_{m \times n}$ تحویل شده‌ی سطری نام دارد هرگاه: درایه پیشرو در هر سطر برابر یک باشد و در ستون مربوط به آن درایه، سایر درایه‌ها صفر باشند. یک ماتریس تحویل شده سطری را مشاهده می‌کنید:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

مثال: ماتریس همانی، تحویل شده‌ی سطری است.

تمرین: ماتریس A به ماتریس تحویل شده سطری هم ارز تبدیل کنید:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 10 \\ 2 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

پاسخ:

اعمال سطری مقدماتی مورد استفاده را به ترتیب نشان داده‌ایم. منظور از R_i سطر iام است.

$$\begin{aligned} A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 10 \\ 2 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix} &\xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - R_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow \frac{1}{2}R_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

البته این ترتیب از اقدامات یکتا نیست و ممکن است به صورتهای دیگری نیز ماتریس تحویل یافته هم‌ارز A بتوان یافت.

قضیه: هر ماتریس A هم‌ارز سطری با یک ماتریس تحویل شده سطری است.

پس هر ماتریس را می‌توان با انجام اعمال سطری مقدماتی به ماتریسی تحویل شده تبدیل کرد و همیشه امکان این کار وجود دارد.

مثال: برای ماتریس‌های A و B کدام گزینه صحیح است؟

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- (1) A و B تحویل شده‌ی سطری‌اند.
- (2) فقط A تحویل شده‌ی سطری است.
- (3) هیچ یک تحویل شده‌ی سطری نیستند اما هرکدام با یک تحویل شده‌ی سطری هم‌ارزند.
- (4) هیچ کدام با ماتریس تحویل شده‌ی سطری هم‌ارز نیستند.

پاسخ: گزینه ۳

A تحویل شده‌ی سطری نیست چون a_{33} عنصر پیشروی سطر سوم است اما در ستون آن همه درایه‌های دیگر صفر نیستند. همچنین B تحویل شده‌ی سطری نیست چون عنصر پیشروی سطر اول مخالف یک است. البته هر ماتریس، با یک ماتریس تحویل شده‌ی سطری هم‌ارز است.

تحویل یافته سطری پلکانی (سطری اشلی)

. ماتریس $R_{m \times n}$ تحویل شده‌ی سطری نام دارد هرگاه:

- الف:** اولین درایه غیرصفر هر سطر برابر یک باشد. (عنصر پیشرو).
- ب:** سایر درایه‌های ستون مربوط به عنصر پیشرو صفر باشند.

ج: عناصر پیشروی هر سطر، شماره ستون‌های صعودی داشته باشند. یعنی سطر به سطر به سمت راست حرکت کنند.

د: سطرهای کاملاً صفر، در انتها آمده باشند. (با رعایت (ج) این ویژگی به صورت خودکار رخ می‌دهد).

مثال: ماتریس همانی، تحویل یافته سطری پلکانی است.

مثال: از بین این سه ماتریس کدام تحویل یافته سطری پلکانی است؟

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

پاسخ: از بین این سه ماتریس فقط ماتریس A تحویل شده‌ی سطری پلکانی است.

قضیه: هر ماتریس A هم‌ارز سطری یک ماتریس تحویل یافته سطری پلکانی است.

پس هر ماتریس را می‌توان با انجام اعمال سطری مقدماتی به ماتریسی تحویل شده سطری پلکانی تبدیل کرد و همیشه امکان این کار وجود دارد.

روش حذفی گاوس - جردن

در روش حذفی گاوس، برای حل دستگاه n معادله n مجهول پس از تشکیل ماتریس افزوده با انجام اعمال سطری مقدماتی سعی می‌کنیم ماتریس ضرایب را به ماتریس بالا مثلثی تبدیل کنیم. اما در حالت کلی‌تر برای دستگاه m معادله n مجهول ماتریس افزوده را به ماتریس تحویل شده سطری پلکانی تبدیل کنیم. دقت کنید که فقط ماتریس مربع را می‌توان با روش حذفی به ماتریس بالا مثلثی تبدیل کرد اما تبدیل به ماتریس تحویل یافته سطری پلکانی برای هر ماتریس امکان‌پذیر است.

مثال: دستگاه معادلات خطی زیر را با روش حذفی (ز) حل کنید.

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

پاسخ:

$$\begin{aligned}
 [A|B] &= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & \vdots & 1 \\ 2 & -2 & 5 & \vdots & 4 \\ 1 & 2 & -1 & \vdots & -3 \\ 1 & -1 & 2 & \vdots & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightleftharpoons R_4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & \vdots & 3 \\ 2 & -2 & 5 & \vdots & 4 \\ 1 & 2 & -1 & \vdots & -3 \\ 0 & 2 & 2 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \leftarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - R_1}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 3 & \vdots & 1 \\ 0 & 3 & -3 & \vdots & -6 \\ 0 & 2 & 2 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \\
 &\xrightarrow{R_2 \rightleftharpoons R_4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & \vdots & 3 \\ 0 & 3 & -3 & \vdots & -6 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -2 \\ 0 & 2 & 2 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow \frac{1}{3}R_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -2 \\ 0 & 2 & 2 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1 \leftarrow R_1 + R_2 \\ R_4 \leftarrow R_4 - 2R_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 4 & \vdots & 5 \end{bmatrix} \\
 &\xrightarrow{\substack{R_4 \leftarrow R_4 - 4R_3 \\ R_1 \leftarrow R_1 - R_3 \\ R_2 \leftarrow R_2 + R_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 7 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 13 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

بنابراین دستگاه اولیه داده شده هم‌ارز است با این دستگاه:

$$\begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -2 \\ 0 = 13 \end{cases}$$

نتیجه می‌گیریم دستگاه جواب ندارد چون آخرین معادله ناممکن است.

مثال: همه جوابهای دستگاه معادلات خطی زیر را بیابید:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

پاسخ: اعمال سطری مقدماتی را تا یافتن هم ارز تحویل یافته سطری پلکانی ادامه می‌دهیم:

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - R_2} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -5 \\ 1 & -3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - R_2} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \\ \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - R_2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow \frac{1}{2}R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \\ \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow \frac{1}{3}R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \xrightarrow{R_2 \rightleftharpoons R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow -R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \end{array}$$

پس دستگاه داده شده اولیه، با این دستگاه هم‌ارز است:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_4 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 2x_4, \quad x_2 = x_4, \quad x_3 = 3x_4$$

بنابراین تمام بردارهای به فرم $X = \begin{bmatrix} 2\alpha \\ \alpha \\ 3\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$ جواب این دستگاه هستند.

تحلیل دستگاه‌های معادلات خطی

دستگاه معادلات خطی با m معادله و n مجهول را در نظر بگیرید.

الف: اگر $m < n$ (تعداد مجهولات بیشتر از تعداد معادلات)

دستگاه $AX = 0$:

دستگاه خطی همگن وقتی تعداد مجهولات بیشتر از تعداد معادلات باشد بی‌شمار جواب دارد.

دستگاه $AX = B$:

دستگاه خطی ناهمگن در این حالت ممکن است بدون جواب باشد، جواب یکتا داشته باشد یا بی‌شمار جواب داشته باشد. بهتر است به روش حذفی گاوس آن را بررسی کنیم. سطرهای کاملاً صفر که ممکن است در انتهای ماتریس به وجود آیند، شرط وجود جواب را مشخص می‌کنند.

ب: اگر $m = n$ (تعداد مجهولات برابر با تعداد معادلات)

دستگاه $AX = 0$:

همه چیز به دترمینان ماتریس ضرایب بستگی دارد، اگر $\det A \neq 0$ دستگاه همگن فقط جواب بدیهی دارد. اگر $\det A = 0$ دستگاه همگن بی‌شمار جواب دارد.

دستگاه $AX = B$:

تعداد جواب‌ها به دترمینان ماتریس ضرایب و دترمینان ماتریس افزوده بستگی دارد. اگر $\det A \neq 0$ دستگاه ناهمگن جواب یکتا دارد. اگر $\det A = 0$ باشد، ممکن است دستگاه جوابی نداشته باشد (ناسازگار) یا بی‌شمار جواب داشته باشد. کفایت ستون مقادیر B را به جای یکی از ستون‌های A قرار دهیم و دترمینان $[A|B]$ را به دست آوریم. اگر باز هم دترمینان صفر به دست آمد، دستگاه بی‌شمار جواب دارد و اگر این بار دترمینان غیرصفر شد، دستگاه ناسازگار است و جوابی ندارد.

توجه: اگر $m > n$ (تعداد معادلات بیشتر از تعداد مجهولات باشد) می‌توانیم از روش حذفی گاوس برای تحلیل

وجود جواب استفاده کنیم یا با جایگزینی یک معادله در سایر معادلات تعداد آنها را کاهش دهیم.

توجه: در هر دستگاه خطی با n معادله و n مجهول وقتی $\det A \neq 0$ باشد، جواب یکتای دستگاه $X = A^{-1}B$ است.

مثال: شرط وجود جواب برای دستگاه معادلات خطی زیر کدام است؟

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 = b \\ 2x_1 + 3x_2 - 9x_3 = a \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = a + b \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) & 3a = 4b \\ (2) & a + b = 0 \\ (3) & 2a = 3b \\ (4) & a - 2b = 0 \end{matrix}$$

پاسخ: گزینه ۱

روش اول: همواره می‌توان با روش حذفی دستگاه را تحلیل کرد. کفایت تلاش کنیم درایه‌های زیر عناصر پیشرو صفر شوند و عناصر پیشرو سطر به سطر به سمت راست بروند.

$$\begin{aligned} [A|B] &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & : & b \\ 2 & 3 & -9 & : & a \\ 1 & -1 & -2 & : & a+b \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & : & b \\ 0 & 1 & -1 & : & a-2b \\ 1 & -1 & -2 & : & a+b \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & : & b \\ 0 & 1 & -1 & : & a-2b \\ 0 & -2 & 2 & : & a \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & : & b \\ 0 & 1 & -1 & : & a-2b \\ 0 & 0 & 0 & : & 3a-4b \end{bmatrix} \end{aligned}$$

یک سطر صفر در انتها داریم. بنابراین شرط وجود جواب $3a - 4b = 0$ است.

روش دوم: تعداد مجهولات و معادلات برابر است. شرط وجود جواب برای $AX=B$ آن است که یا $\det A \neq 0$ باشد (جواب یکتا) یا دترمینان A و دترمینان $[A|B]$ هر دو صفر باشند (بی‌شمار جواب).

$$[A|B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & : & b \\ 2 & 3 & -9 & : & a \\ 1 & -1 & -2 & : & a+b \end{bmatrix}$$

دترمینان A صفر است:

$$\det A = (-6 - 9 + 8) - (-12 - 4 + 9) = 0$$

پس برای وجود جواب، با جایگزینی ستون B به جای یکی از ستون‌های A باز هم باید دترمینان صفر شود:

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 & b \\ 3 & -9 & a \\ -1 & -2 & a+b \end{vmatrix} = (-9(a+b) + 4a - 6b) - (9b - 12(a+b) - 2a) = 9a - 12b = 0 \Rightarrow 3a = 4b$$

مثال: اگر دستگاه زیر بی‌شمار جواب داشته باشد فرم جوابها و مقدار a را به دست آورید:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4 \\ -x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 5 \\ -x_1 + 5x_2 - 4x_3 = a \end{cases}$$

پاسخ:

برای داشتن بی‌شمار جواب باید دترمینان A و دترمینان $[A|B]$ (جایگزینی B به جای یک ستون A) هر دو صفر باشند. دترمینان A صفر است. دترمینان این ماتریس نیز باید صفر باشد:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 4 & -3 & 5 \\ 5 & -4 & a \end{vmatrix} = (-9a - 50 - 64) - (-60 - 8a - 60) = -a + 6 = 0 \Rightarrow a = 6$$

با جانشانی مقدار a دستگاه را حل کنیم:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4 \\ -x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 5 \\ -x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 6 \end{cases}$$

ماتریس افزوده را تشکیل داده و روش حذفی را اجرا می‌کنیم:

$$\begin{aligned} [A|B] &= \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 & \vdots & 4 \\ -1 & 4 & -3 & \vdots & 5 \\ -1 & 5 & -4 & \vdots & 6 \end{bmatrix} \\ \xrightarrow{\substack{R_1 \leftarrow R_1 - R_1 \\ R_2 \leftarrow R_2 - R_1}} & \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 2 & -2 & \vdots & 2 \end{bmatrix} \\ \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} & \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

دستگاه اولیه، با این دستگاه هم‌ارز است:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4 \\ x_2 - x_3 = 1 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_2 = x_3 + 1, \quad x_1 = x_3 - 1$$

پس دستگاه بی‌شمار جواب به فرم $X = \begin{bmatrix} \alpha - 1 \\ \alpha + 1 \\ \alpha \end{bmatrix}$ دارد.

* * * * *

رتبه ماتریس، مفهوم پرکاربردی است که معنای دقیق‌تر آن و کاربردهایش را در فصل سوم مطالعه خواهیم کرد. در حال حاضر با استفاده از مفاهیم فصل اول آن را معرفی و محاسبه می‌کنیم.

رتبه ماتریس: (rank A)

اگر روی ماتریس دلخواه A با اعمال سطری مقدماتی روش حذفی را اجرا کنیم طوری که درایه‌های زیر عناصر پیشرو صفر شوند و عناصر پیشرو، سطر به سطر به سمت راست بروند، در نهایت به ماتریس‌هایی به این فرم خواهیم رسید:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

پس از اتمام عملیات حذف، تعداد عناصر لولا (عناصر پیشروی غیر صفر) را رتبه ماتریس می‌نامیم. تعداد سطرها کاملاً صفر شده را پوچی ماتریس و تعداد سطرها دیگر را رتبه سطری ماتریس می‌نامیم. ستون‌هایی که شامل عنصر لولا باشند، ستون‌های پایه‌ای نام دارند. تعداد ستون‌های پایه‌ای را رتبه ستونی ماتریس می‌نامیم. حتماً توجه کرده‌اید که:

- رتبه سطری، رتبه ستونی، تعداد عناصر لولا و رتبه ماتریس، همه با هم برابرند.

مثال:

در ماتریس B درایه‌های b_{11} و b_{33} عناصر لولا هستند. رتبه سطری و رتبه ستونی این ماتریس ۲ است

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

چند نکته:

- تنها ماتریسی که رتبهٔ صفر دارد، ماتریس صفر است.

$$\text{rank } A = 0 \Leftrightarrow A = 0$$

- اگر همه سطرها، ضربی از یک سطر باشند، رتبه ماتریس برابر با یک است. چون با اعمال سطری مقدماتی همه سطرها به جز سطر اول را می‌توان پوچ کرد. (به سطر صفر تبدیل کرد).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 10 \\ 3 & 6 & 15 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank } A = 1$$

- اگر یک سطر ماتریس، ترکیب خطی سطرهای دیگر باشد، با اعمال سطری مقدماتی به سطر پوچ تبدیل خواهد شد. مثلاً در ماتریس زیر، دو سطر اول مضرب هم نیستند اما سطر سوم مجموع دو سطر دیگر است. پس رتبه ماتریس برابر با دو است.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 10 \\ 3 & 7 & 15 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank } B = 2$$

- با توجه به تعریف، واضح است که رتبه هر ماتریس، نمی‌تواند بیشتر از تعداد سطرها و بیشتر از تعداد ستون‌هایش باشد. پس در هر ماتریس $A_{n \times m}$ داریم:

$$\text{rank } A \leq \min(m, n)$$

- رتبه سطری و ستونی برابر است. مثلاً اگر رتبه سطری برابر با دو باشد، یعنی دو سطر مستقل (غیر وابسته) داریم و سایر سطرها وابستگی خطی به آن دو سطر دارند. در اینصورت حتماً در بین ستون‌ها هم فقط دو ستون مستقل داریم.

ارتباط رتبه و درمینان:

رتبه ماتریس برابر است با اندازه بزرگترین زیرماتریس مربعی که درمینان آن غیرصفر شود. برای مثال در یک ماتریس 3×5 بزرگترین زیرماتریس‌های مربع، 3×3 هستند. اگر حداقل یکی از آنها درمینان غیر صفر داشته باشد، معلوم می‌شود که رتبه ماتریس ۳ است. اگر درمینان همه 3×3 ها صفر شود زیرماتریس‌های 2×2 را بررسی می‌کنیم.

* * * * *

مثال: رتبه ماتریس B کدام است؟

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 5 \\ 7 & 9 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

- (1) یک
(2) دو
(3) سه
(4) چهار

پاسخ:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 5 \\ 7 & 9 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

سه زیرماتریس 3×3 در B قرار دارد. اگر دترمینان یکی از آنها غیرصفر باشد رتبه ماتریس 3 است.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 9 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 0 - 0 - 54 \neq 0 \Rightarrow \text{rank } B = 3$$

مثال: رتبه ماتریس A کدام است؟

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 & 6 \\ -5 & -2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

- (1) 4
(2) 3
(3) 2
(4) 1

پاسخ: گزینه 3

روش اول: با روش حذفی تعداد عناصر لولا و سطرها را مشخص کنیم.

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 & 6 \\ -5 & -2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ -5 & -2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{R_2 - 5R_1} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -12 & -4 & -10 \\ -3 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - 3R_1} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -12 & -4 & -10 \\ 0 & -6 & -2 & -5 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{R_3 - \frac{1}{2}R_2} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -12 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

پس رتبه ماتریس برابر با 2 و پوچی آن یک است.

روش دوم: از دترمینان‌ها استفاده کنیم. از زیرماتریس‌های 3×3 آغاز کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 & 6 \\ -5 & -2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \det \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -5 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (4-12+0)-(12-20+0)=0 \\ \det \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = (16+0-12)-(0-16+20)=0 \end{cases}$$

دترمینان همه 3×3 ها صفر شد پس رتبه ماتریس کمتر از ۳ است. با بررسی زیرماتریس‌های 2×2 می‌بینیم که حداقل یکی از آنها دترمینان غیرصفر دارد. پس $\text{rank } A = 2$.

* * * * *

مثال: رتبه ماتریس $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & -1 & -2 \\ -\frac{3}{2} & 3 & 6 \end{bmatrix}$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر ۱۴۰۴)

(1) یک

(2) دو

(3) سه

(4) صفر

پاسخ: گزینه ۱

با کمی دقت ارتباط بین سطرها مشخص می‌شود. سطر i ام را با R_i نشان دهیم:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & -1 & -2 \\ -\frac{3}{2} & 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{cases} R_1 \\ R_2 = -\frac{1}{2}R_1 \\ R_3 = R_1 - R_2 = \frac{3}{2}R_1 \end{cases}$$

پس در ماتریس A سطرهاي دوم و سوم مضرب سطر اول هستند. $\text{rank } A = 1$.

* * * * *

استقلال خطی

هر ترکیب خطی از بردارهای $X_1, X_2, \dots, X_k$ به صورت $c_1X_1 + c_2X_2 + \dots + c_kX_k$ است که مضارب $c_1, c_2, \dots, c_k$ اسکالر هستند. یک ترکیب خطی وجود دارد که حاصل آن همیشه بردار صفر است:

$$0X_1 + 0X_2 + \dots + 0X_k = 0$$

حالا سوال اینجاست که آیا ترکیب خطی دیگری نیز از این بردارها وجود دارد که برابر با صفر باشد؟ اگر این ترکیب، تنها ترکیب خطی باشد که بردار صفر را می‌دهد، می‌گوییم بردارهای $X_1, X_2, \dots, X_k$ مستقل خطی هستند. اما اگر اسکالرهایی $c_1, c_2, \dots, c_k$ موجود باشند که همه با هم صفر نباشند اما حاصل $c_1X_1 + c_2X_2 + \dots + c_kX_k$ بردار صفر شود، می‌گوییم بردارهای $X_1, X_2, \dots, X_k$ وابسته خطی هستند. به طور خلاصه:

$$- \text{ بردارهای } X_1, X_2, \dots, X_k \text{ مستقل خطی اند هرگاه از تساوی } c_1X_1 + c_2X_2 + \dots + c_kX_k = 0 \text{ بتوان نتیجه گرفت } c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0.$$

* * * * *

مثال: بردارهای X_1, X_2, X_3 مستقل خطی هستند یا وابسته خطی؟

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad X_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad X_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

پاسخ:

روش اول: فرض کنیم $c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3 = 0$ سپس با حل دستگاه بررسی کنیم که آیا نتیجه می‌شود $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ یا خیر؟

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + 3c_2 = 0 \\ c_1 - 2c_2 + 4c_3 = 0 \\ 2c_1 + 2c_2 + c_3 = 0 \end{cases}$$

با حل این دستگاه می‌بینیم که تنها جواب $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ است. پس بردارها مستقل خطی هستند.

روش دوم:

ماتریسی که بردارهای X_1, X_2, X_3 ستون‌های آن باشند را در نظر می‌گیریم. رتبه این ماتریس نشان می‌دهد که چه تعداد از ستون‌ها مستقل خطی هستند. اگر دترمینان ماتریس مربع مخالف صفر شود نشان‌دهنده آن است که ستون‌های آن مستقل خطی هستند.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 11 \neq 0$$

پس بردارهای X_1, X_2, X_3 مستقل خطی هستند.

* * * * *

مثال: بردارهای X_1, X_2, X_3 مستقل خطی هستند یا وابسته خطی؟

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \quad X_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad X_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

پاسخ:

ماتریسی که بردارهای X_1, X_2, X_3 ستون‌های آن باشند را در نظر می‌گیریم. دترمینان آن را به دست آوریم:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = -4 + 6 + 16 + 8 - 24 - 2 = 0$$

پس بردارهای X_1, X_2, X_3 مستقل خطی نیستند در نتیجه وابسته خطی هستند.

* * * * *



پایان باشید

پایان بخش هشتم از تدریس فصل اول