

موسسه بابان

انتشارات بابان و انتشارات راهیان ارشد

پایگاه داده‌ها

فصل پنجم: وابستگی تابعی (درسنامه)

(ویژه کنکور ارشد ۱۴۰۵)

ویژه‌ی داوطلبان کنکور کارشناسی ارشد مهندسی کامپیوتر و IT

براساس کتب مرجع

آبراهام سیلبرشاتز، راما کریشنان، رامز المصری، سی جی دیت و توماس کانلی و کارولین بگ

ارسطو خلیلی فر

مقدمه

در فصل سوم (مدل رابطه‌ای)، فرآیند تبدیل **مدل تحلیل** (نمودار ER) به **مدل طراحی** (جداول) را دیدیم و گفتیم که اگر این فرآیند به درستی انجام شود، نتیجه آن جداول **نرمال** (خوش طرح) است. اما اگر این فرآیند به درستی انجام نشود، نتیجه آن جداول **غیرنرمال** است. جداول **غیرنرمال** به مشکل **افزونی محتوایی (طبیعی)** مبتلا هستند و از آن **رنج** می‌برند که خود این افزونی ریشه در **تکرار اطلاعات** دارد و تکرار اطلاعات ریشه در وجود **وابستگی‌های بد** (افزونی‌ساز و خرابکار) بین ستون‌های جدول دارد. راه **درمان** جداول غیرنرمال و تبدیل آن به جداول نرمال، فرآیند **نرمال‌سازی** است. در فرآیند نرمال‌سازی، انواع **وابستگی‌های بد** به ترتیب و به طور سلسله‌مراتبی **حذف** می‌شوند که به تبع منجر به کاهش تکرار اطلاعات و کاهش افزونی محتوایی به طور سلسله‌مراتبی می‌شود.



خلاصه فصل: هدف این فصل **کشف کلید کاندید** از روی **وابستگی‌های تابعی** است، چون فرآیند **نرمال‌سازی** با کشف کلید کاندید شروع می‌شود.

به طور کلی سه نوع وابستگی بین ستون‌های جداول وجود دارد:

- **وابستگی تابعی (FD: Functional Dependency)**
- **وابستگی چند مقدار (MVD: Multi-Valued Dependency)**
- **وابستگی الحاقی (JD: Join Dependency)**

توجه: وابستگی چندمقداری (MVD) و وابستگی الحاقی (JD) نوع دیگری از وابستگی‌ها هستند که **تابعی نیستند**. شرح **خوب** و **بد** آن در فصل نرمال‌سازی به طور کامل بررسی می‌شود. به طور کلی دو نوع **وابستگی تابعی** بین ستون‌های جداول وجود دارد:

الف) وابستگی‌های تابعی خوب:

- ۱- **وابستگی تابعی ساده** با ابرکلید (FD: Functional Dependency)
 - ۲- **وابستگی تابعی کامل** (تام) با کلید کاندید (FFD: Fully Functional Dependency)
- ب) وابستگی‌های تابعی بد:**

- ۱- **وابستگی تابعی غیرکامل** (بخشی) (PFD: Partial Functional Dependency)
 - ۲- **وابستگی تابعی انتقالی** (تراگذاری) (TFD: Transitive Functional Dependency)
 - ۳- **وابستگی تابعی معکوس** (RFD: Reverse Functional Dependency)
- توجه:** دقت کنید وابستگی‌های تابعی بد، وابستگی تابعی هستند، اما بد هستند، وابستگی‌های تابعی بد در فصل نرمال‌سازی به طور کامل بررسی می‌شود.
- توجه:** به چیزی می‌گوییم FD که شرط **تابعی** بودن برای آن برقرار باشد و **توجه مهم:** وابستگی تابعی، هم **خوب** دارد و هم **بد**، صرف داشتن وابستگی تابعی، نشانه خوب بودن نیست. انسان هم، خوب و بد دارد، صرف انسان بودن، نشانه خوب بودن نیست.

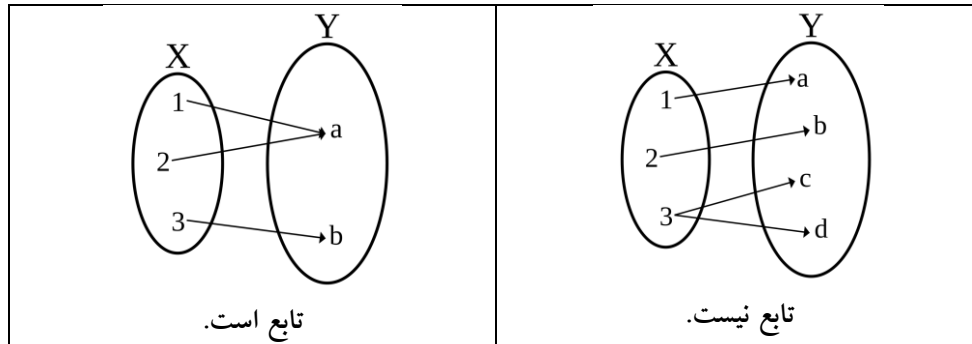
تن آدمی شریف است به جانِ آدمیت نه همین لباسِ زیباست نشانِ آدمیت (سعدی)

تئوری وابستگی تابعی

تئوری **وابستگی تابعی**، ریاضیات پایه فرآیند نرمال‌سازی است. توسط وابستگی‌های تابعی، ابتدا **کلید کاندید** را پیدا می‌کنیم، سپس با **تشخیص** اینکه جداول به کدام نوع از **وابستگی‌های بد** مبتلا هستند، می‌توانیم فرآیند **درمان (نرمال‌سازی)** را شروع کنیم.

تعریف تابع در ریاضیات

تابع در ریاضیات به زبان ساده یعنی هر ورودی، فقط یک خروجی می‌دهد. و اگر یک ورودی بیش از یک خروجی بدهد، دیگر تابع نیست. شکل زیر گویای مطلب است:



تعریف عمومی وابستگی تابعی (FD: Functional Dependency)

فرض کنید R یک رابطه باشد و X و Y دو زیرمجموعه از خصیصه‌های R باشند، یک وابستگی تابعی روی رابطه R به صورت $X \rightarrow Y$ نمایش داده می‌شود، اگر و فقط اگر به ازای یک مقدار X فقط یک مقدار برای Y وجود داشته باشد. به همین دلیل این وابستگی به عنوان وابستگی تابعی نامگذاری شده است. و به این صورت خوانده می‌شود که Y وابستگی تابعی دارد به X (Y, X) را می‌دهد). به بیان دیگر می‌توان مقدار Y را از روی مقدار X به دست آورد. طبق تعریف، به سمت چپ یک **FD**، **تعیین کننده** یا **دترمینان** (Determinant) و به سمت راست آن **وابسته** (Dependent) گفته می‌شود. گاهی برای وضوح بیشتر به صورت $R.X \rightarrow R.Y$ نوشته می‌شود. در ادامه به بررسی انواع **وابستگی‌های خوب** می‌پردازیم:

وابستگی تابعی ساده با ابرکلید (FD: Functional Dependency)

وابستگی تابعی ساده (FD): صفت $\rightarrow$ **ابرکلید**

چراکه طبق تعریف، **ابرکلید** در سمت چپ وابستگی، الزام یکتایی مقدار دارد و تکرار در سطر ندارد و همین موضوع مفهوم **تابع** را برقرار می‌کند. در این شرایط، مستقل از اینکه سمت راست وابستگی چه نوع صفتی باشد، قطعاً وابستگی تابعی با ابرکلید (FD) ایجاد شده است. **توجه:** خود FD انواع مختلفی دارد که وابستگی تابعی ساده با ابرکلید، FD خوب است، انواع بعدی FD (شامل وابستگی‌های تابعی بد یا انواع FD بد) در فصل نرمال‌سازی بررسی می‌شود.

وابستگی تابعی کامل (تام) با کلید کاندید (FFD: Fully Functional Dependency)

وابستگی تابعی کامل (FFD) $\Rightarrow$ صفت $\rightarrow$ **کلید کاندید**

چراکه طبق تعریف، **کلید کاندید** در سمت چپ وابستگی، الزام یکتایی مقدار دارد و تکرار در سطر ندارد و همین موضوع مفهوم **تابع** را برقرار می‌کند. در این شرایط، مستقل از اینکه سمت راست وابستگی چه نوع صفتی باشد، قطعاً وابستگی تابعی کامل با کلید کاندید (FFD) ایجاد

شده است.

تعریف وابستگی تابعی کامل به بیان دیگر: اگر X و Y دو زیرمجموعه از خصیصه‌های R باشند، یک وابستگی تابعی کامل FFD روی رابطه R به صورت $X \rightarrow Y$ نمایش داده می‌شود، **شرط اول** اینکه Y با X وابستگی تابعی FD داشته باشد، یعنی X ابرکلید باشد و **شرط دوم** اینکه Y با هیچ یک از زیرمجموعه‌های X وابستگی تابعی FD نداشته باشد. در این تعریف صفت X را ترکیبی فرض کرده‌ایم. بدیهی است اگر سمت چپ FD صفت ساده باشد، وابستگی تابعی FD خود به خود وابستگی تابعی کامل FFD است. به بیان دیگر وابستگی FD وقتی FFD است که سمت چپ وابستگی FD **کاهش ناپذیر** باشد، یعنی **ابرکلید کثیف** (با عضو زائد) نباشد بلکه **ابرکلید تمیز** (بدون عضو زائد) باشد، ابرکلید تمیز همان کلید کاندید است.

مثال: رابطه $R(A, B, C)$ با مجموعه وابستگی‌های تابعی (FD) زیر مفروض است:

$$F = \{A \rightarrow B, A \rightarrow C, B \rightarrow C\}$$

وابستگی انتقالی

$\swarrow$
 وابستگی کامل
 $\searrow$

A	B	C
1	101	202
2	102	203
3	102	203
4	103	202

از بین وابستگی‌های تابعی فوق کدام خوب و کدام بد است؟

حل:

اجتماع تمام خصیصه‌های سمت راست وابستگی‌های غیربدیهی - تمام خصیصه‌های جدول = عضو کلید کاندید

$$A \rightarrow B \rightarrow C - BC = A$$

$$\{A\}^+ = \{A\} \Rightarrow$$

$$A \rightarrow B \Rightarrow \{A, B\}$$

$$B \rightarrow C \Rightarrow \{A, B, C\}$$

$$\{A\}^+ = \{A, B, C\}$$

مطابق وابستگی‌های تابعی $F = \{A \rightarrow B, A \rightarrow C, B \rightarrow C\}$ ، ستون A همه ستون‌های دیگر

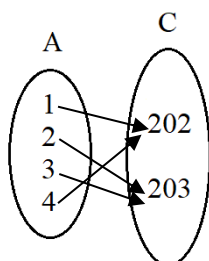
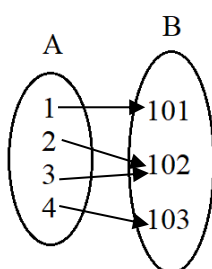
یعنی B و C را می‌دهد، بنابراین ستون A **کلید کاندید** جدول R است.

چرا وابستگی تابعی خوب، خوب است؟

چون سمت چپ وابستگی تابعی **خوب**، کلید کاندید یا ابرکلید **است**، بنابراین الزام کلیدی و یکتایی مقدار **دارد**، بنابراین در سمت چپ خودش تکرار اطلاعات در سطر ایجاد نمی‌کند، ستون A کلید کاندید است، پس به طور ذاتی تکرار اطلاعات در سطر ایجاد نمی‌کند. وابستگی‌های تابعی زیر **خوب** است، چون سمت چپ آن ابرکلید یا کلید کاندید است:

$A \rightarrow B$

$A \rightarrow C$



وابستگی انتقالی

وابستگی کامل

A	B	C
1	101	202
2	102	203
3	102	203
4	103	202

چرا وابستگی تابعی بد، بد است؟

چون سمت چپ وابستگی تابعی **بد**، کلید کاندید یا ابرکلید **نیست** بلکه **غیرکلید** است، بنابراین الزام کلیدی و یکتایی مقدار **ندارد**، بنابراین ممکن است در سمت چپ خودش تکرار اطلاعات در سطر ایجاد کند، ستون B کلید کاندید یا ابرکلید نیست، پس به طور ذاتی پتانسیل تکرار اطلاعات در سطر را دارد. وابستگی تابعی بد، عامل تکرار اطلاعات و به تبع افزودگی محتوایی است. **توجه:** ستون B به خودی خود وابستگی تابعی بد ایجاد نکرده است، بلکه وابستگی $B \rightarrow C$ یک **محدودیت جامعیتی خارجی** مربوط به قوانین کسب و کار مورد نظر است که در نهایت توسط فرآیند نرمال سازی قابل **درمان** است.

محدودیت جامعیتی خارجی (قوانین کسب و کار): فرض کنید در این بانک اطلاعات، این قانون وجود دارد که ستون C از روی ستون B تعیین می شود. یعنی C به B وابستگی تابعی دارد به صورت $B \rightarrow C$

در این شرایط، اگر R یک رابطه باشد و B و C دو زیر مجموعه از خصیصه های R باشند، **وابستگی تابعی** روی رابطه R تحت $B \rightarrow C$ برقرار است اگر و تنها اگر، برای هر جفت از تاپل های t_1 و t_2 در R، چنانچه مقدار B در هر دو تاپل برابر باشد، مقدار C نیز باید در هر دو تاپل **یکسان** باشد.

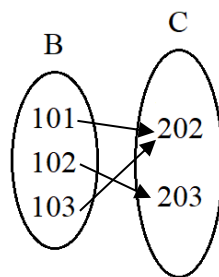
وابستگی تابعی (FD) $\Rightarrow$ صفت $B \rightarrow C$ صفت دارای محدودیت جامعیتی خارجی

با این شرط تابعی که اگر t_1 ، t_2 تا t_n چند تاپل متمایز از R باشند، در این صورت:

$$\text{If } t_1.B = t_2.B \dots = t_n.B \text{ then } t_1.C = t_2.C \dots = t_n.C$$

وابستگی تابعی زیر **بد** است، چون **سمت چپ** آن ابرکلید یا کلید کاندید نیست:

$B \rightarrow C$



وابستگی انتقالی

وابستگی کامل

A	B	C
1	101	202
2	102	203
3	102	203
4	103	202

توجه: مقدار 102 در ستون B تکرار سطری شده است و به دلیل وجود وابستگی تابعی $B \rightarrow C$ باعث شده است به ازای هربار آمدن 102 در ستون B مقدار 203 در ستون C تکرار شود و این یعنی **افزونگی محتوایی**، ناشی از تکرار اطلاعات که خود ناشی از **وابستگی تابعی بد** است. دیگه یاد گرفتیم چرا وابستگی بد، بد است و باید از جدول حذف کنیم.

سوال: چرا نمی‌شود برای 102 مقدار دیگری به جز 203 بیاید؟

پاسخ: چون برای مثال اگر مقدار 204 برای 102 درج شود، خود اصل **وابستگی تابعی** نقض می‌شود. چون به ازای هر 102 آنوقت دو مقدار 203 و 204 وجود دارد، وقتی این **جامعیت وابستگی** **تابعی**، چه خوب و چه بد برای یک جدول وجود خارجی دارد و تعریف شده‌است، DBMS صحت اجرای آنرا گارانتی می‌کند و اجازه نقض آنرا نمی‌دهد. البته توسط دستور update می‌توان مقدار 203 برای 102 را به 204 تغییر داد ولی همه جا باید برای 102 دیگر 204 شود.

مثال: جداول نرمال S، SP، و P با مقادیر زیر را در نظر بگیرید:

کلید کandid	غیر کلید	غیر کلید	غیر کلید	عضو کلید کandid	عضو کلید کandid	غیر کلید	کلید کandid	غیر کلید	غیر کلید
S#	Sname	City	Status	S#	P#	QTY	P#	Pname	Color
S1	Sn1	C1	10	S1	P1	10	P1	Pn1	Red
S2	Sn2	C2	20	S1	P2	20	P2	Pn2	Blue
S3	Sn3	C3	30	S2	P1	30	جدول P		

جدول S جدول SP

جدول S	FD	FFD
غیر کلید Sname → S# ابر کلید و کاندید است	✓	✓
غیر کلید City → S# ابر کلید و کلید کاندید است	✓	✓
غیر کلید Status → S# ابر کلید و کلید کاندید است	✓	✓
غیر کلید City → (S#, Sname) ابر کلید است و کلید کاندید نیست	✓	✗
غیر کلید Status → (S#, Sname) ابر کلید است و کلید کاندید نیست	✓	✗
غیر کلید Sname → (S#, City) ابر کلید است و کلید کاندید نیست	✓	✗
غیر کلید Status → (S#, City) ابر کلید است و کلید کاندید نیست	✓	✗
غیر کلید Sname → (S#, Status) ابر کلید است و کلید کاندید نیست	✓	✗
غیر کلید City → (S#, Status) ابر کلید است و کلید کاندید نیست	✓	✗

در جدول S ستون S# **کلید کاندید** است، بنابراین:

S# → Sname: وابستگی تابعی کامل (FFD) است، از روی S# می توان Sname را به دست آورد، چون به ازای هر S# فقط و فقط یک Sname وجود دارد.

S# → City: وابستگی تابعی کامل (FFD) است، از روی S# می توان City را به دست آورد، چون به ازای هر S# فقط و فقط یک City وجود دارد.

S# → Status: وابستگی تابعی کامل (FFD) است، از روی S# می توان Status را به دست آورد، چون به ازای هر S# فقط و فقط یک Status وجود دارد.

توجه: هر مقدار از S# در جدول S **فقط** به یک مقدار از Sname، City و Status متناظر است، چون خود سطر کلید کاندید S# هیچ وقت تکرار ندارد و یکتا است، بنابراین وابستگی به **ابر کلید** و **کلید کاندید** خود به خود رابطه یک به یک **تابعی** ایجاد می کند.

$$\left. \begin{array}{l} S.S\# \rightarrow S.Sname \\ S.S\# \rightarrow S.City \\ S.S\# \rightarrow S.Status \end{array} \right\} S.S\# \rightarrow S.(Sname, City, Status)$$

$(S\#, Sname) \rightarrow City$: وابستگی تابعی (FD) دارد، اما وابستگی تابعی کامل (FFD) ندارد. زیرا صفت City به صورت $S\# \rightarrow City$ با صفت $S\#$ وابستگی تابعی (FD) دارد. صفت Sname در کنار $S\#$ عضو زائد است، زیرا $S\#$ به تنهایی خودش کلید کاندید است. یک کلید کاندید اگر در کنار خودش، هم نشین زائد و اضافه داشته باشد، به **ابرکلید کثیف** تبدیل می شود.

پسر نوح (کلید کاندید) با بدان (عضو زائد) بنشست خانندان نبوتش گم شد

جدول P	FD	FFD
غیرکلید $P\# \rightarrow Pname$ ابرکلید و کلید کاندید است	✓	✓
غیرکلید $P\# \rightarrow Color$ ابرکلید و کلید کاندید است	✓	✓
غیرکلید $(P\#, Pname) \rightarrow Color$ ابرکلید است و کلید کاندید نیست	✓	✗
غیرکلید $(P\#, Color) \rightarrow Pname$ ابرکلید است و کلید کاندید نیست	✓	✗

در جدول P ستون $P\#$ **کلید کاندید** است، بنابراین:

$P\# \rightarrow Pname$: وابستگی تابعی کامل (FFD) است، از روی $P\#$ می توان $Pname$ را به دست آورد.

$P\# \rightarrow Color$: وابستگی تابعی کامل (FFD) است، از روی $P\#$ می توان $Color$ را به دست آورد.

جدول SP	FD	FFD
غیرکلید $(S\#, P\#) \rightarrow QTY$ ابرکلید و کلید کاندید است	✓	✓

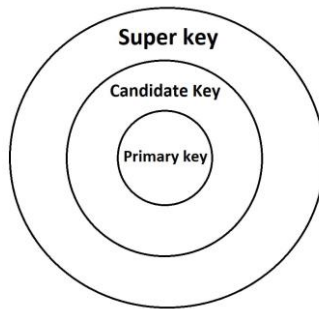
در جدول SP ستون های $(S\#, P\#)$ باهم **کلید کاندید** است، بنابراین:

$(S\#, P\#) \rightarrow QTY$: وابستگی تابعی کامل (FFD) است، از روی $S\#, P\#$ می توان QTY را به دست آورد. صفت QTY با هیچ یک از دو جزء کلید کاندید یعنی $S\#$ و $P\#$ به تنهایی وابستگی تابعی (FD) ندارد. ترکیب $(S\#, P\#)$ باهم به عنوان کلید کاندید جدول SP است. و عضو زائد هم ندارد زیرا نه $S\#$ و نه $P\#$ به تنهایی در جدول SP کلید کاندید نیستند. بلکه ترکیب آن **کلید کاندید** ایجاد می کند.

توجه: دقت کنید که همیشه در طرفین وابستگی تابعی، تک خصیصه وجود ندارد، بلکه همان طور

که در تعریف وابستگی تابعی گفته شد، همواره در طرفین وابستگی تابعی زیرمجموعه‌ای از خصیصه‌ها وجود دارد.

توجه: در فصل سوم (مدل رابطه‌ای) دیدیم که سلسله مراتب کلیدها به صورت زیر است:



توجه: هر **ابركلید** الزاما **کلید کاندید** نیست. ولی هر کلید کاندید همواره **ابركلید** است. **ابركلیدی** که عضو زائد و همنشین زائد نداشته باشد، **کلید کاندید** هم هست. اگر یک **ابركلید**، **تمیز** باشد به مرتبه کلید کاندید ارتقا می‌یابد. اما اگر **کنیف** باشد درجا می‌زند و همان **ابركلید** **کنیف** باقی می‌ماند. به **ابركلید** **تمیز** (بدون چیز میز اضافه)، **کلید کاندید** گفته می‌شود.

وابستگی تابعی بدیهی (TFD: Trivial Functional Dependency)

روی رابطه R یک وابستگی تابعی به صورت $X \rightarrow Y$ **بدیهی** (نامهم، غیرمهم، نامطرح، بی‌اثر) نامیده می‌شود، اگر و فقط اگر $Y \subseteq X$ باشد. بدین معنی که سمت راست وابستگی **زیرمجموعه‌ای** از سمت چپ آن باشد. به عبارت دیگر، {مجموعه کوچک} $\rightarrow$ {مجموعه بزرگ} وابستگی تابعی بدیهی دارد اگر و فقط اگر: {مجموعه بزرگ} $\subseteq$ {مجموعه کوچک}.

توجه: هر زیرمجموعه‌ای از یک مجموعه بزرگ، به‌طور **بدیهی**، تابع آن مجموعه بزرگ است.

توجه: وابستگی تابعی بدیهی در دل جدول به صورت **پنهان** وجود دارد، اما مهم هم نیست. چون هر صفتی، خودش، خودش را می‌دهد. و هر مجموعه بزرگ، مجموعه کوچک را به صورت تابعی می‌دهد.

توجه: وابستگی تابعی بدیهی، نه وابستگی تابعی خوب است و نه بد، بلکه خاکستری و **خنثی** است و در روند کشف **کلید کاندید** و **نرمال‌سازی** باید **حذف** و نادیده گرفته شود، به حساب نیاید و دخالت هم داده نشود.

مثال: در جدول $S(S\#, Sname, City, Status)$:

$S\#$	Sname	City	Status
S1	Sn1	C1	10
S2	Sn2	C2	20
S3	Sn3	C3	30

جدول S

موارد زیر نمونه‌هایی از **وابستگی تابعی بدیهی** است:

$S\# \rightarrow S\#$: چون $\{S\# \} \subseteq \{S\# \}$ است. هر صفتی، خودش، خود را می‌دهد. در $S\# \rightarrow S\#$ سمت چپ یعنی $S\#$ هم ابرکلید است و هم کلید کاندید، اما وابستگی بدیهی است.
 $S\#, Sname \rightarrow S\#$: چون $\{S\# \} \subseteq \{S\#, Sname \}$ است. در $S\#, Sname \rightarrow S\#$ سمت چپ یعنی $S\#, Sname$ ابرکلید است و کلید کاندید نیست، اما وابستگی بدیهی است.
 $S\#, Sname \rightarrow Sname$: چون $\{Sname \} \subseteq \{S\#, Sname \}$ است.
 $S\#, Sname, City, Status \rightarrow Sname, City$: چون $\{Sname, City \} \subseteq \{S\#, Sname, City, Status \}$ است.

بستار مجموعه وابستگی‌های تابعی

اگر F مجموعه‌ای از وابستگی‌های تابعی باشد، می‌توان با استفاده از **قواعد استنتاج**، وابستگی‌های تابعی **بیشتری** استخراج کرد.
 مجموعه‌ی تمام وابستگی‌های تابعی که می‌توان از مجموعه F استنتاج کرد، **بستار F** نامیده می‌شود و با F^+ نشان داده می‌شود. توجه داشته باشید که تمام وابستگی‌های موجود در F نیز همگی در F^+ حضور دارند. $F \subseteq F^+$

مثال: رابطه $R(A, B, C)$ با مجموعه وابستگی‌های تابعی (FD) زیر مفروض است:

$$F = \{A \rightarrow B, B \rightarrow C\}$$

بستار F (F^+) آن چگونه است؟

حل: می‌دانیم از $A \rightarrow B, B \rightarrow C$ می‌توانیم $A \rightarrow C$ را نتیجه بگیریم، بنابراین F^+ به صورت زیر است:

$$F^+ = \{A \rightarrow B, B \rightarrow C, A \rightarrow C\}$$

بنابراین، با در اختیار داشتن مجموعه‌ای از وابستگی‌های تابعی مانند F ، می‌توان بستار آن یعنی F^+ را به دست آورد. با این حال، هرچه اندازه‌ی مجموعه F بزرگ‌تر شود، فرآیند به دست آوردن F^+ نیز زمان‌برتر خواهد بود. برای کاهش زمان این فرآیند، لازم است از مجموعه‌ای از قواعد جهت

استنتاج وابستگی ها استفاده شود. این مجموعه قواعد نخستین بار توسط **آرمسترانگ** ارائه شد و به همین دلیل، به **قواعد آرمسترانگ** معروف اند.

قواعد استنتاج آرمسترانگ (Armstrong's Axioms)

قواعد آرمسترانگ پایه و اساس استنتاج تمامی وابستگی های تابعی ممکن از یک مجموعه اولیه هستند. این قواعد شامل **سه قاعده اصلی** و **شش قاعده فرعی** است:

قواعد اصلی

فرض کنید A ، B ، C و D هر یک زیرمجموعه ای از صفات رابطه R هستند.

۱- قاعده انعکاسی یا بازتابی (Reflexivity)

اگر $B \subseteq A$ ، آن گاه داریم: $A \rightarrow B$

توضیح: هر زیرمجموعه ای از یک مجموعه صفات بزرگ، به طور بدیهی تابع آن مجموعه بزرگ است. این قاعده همان مفهوم **وابستگی تابعی بدیهی** است.

۲- قاعده افزایشی (Augmentation)

اگر $A \rightarrow B$ ، آن گاه برای C داریم: $AC \rightarrow BC$

$$A \rightarrow B \xrightarrow{\times C} AC \rightarrow BC$$

توضیح: اگر یک وابستگی تابعی وجود داشته باشد، می توان به طرفین آن صفات مشترک اضافه کرد و وابستگی همچنان برقرار خواهد ماند.

۳- قاعده انتقالی یا تعدی (Transitivity)

اگر $B \rightarrow C$ و $A \rightarrow B$ آن گاه داریم: $A \rightarrow C$

$$\left. \begin{matrix} A \rightarrow B \\ B \rightarrow C \end{matrix} \right\} \Rightarrow A \rightarrow C$$

توضیح: وابستگی تابعی می تواند به صورت زنجیره ای گسترش یابد.

سه قاعده اصلی آرمسترانگ یعنی انعکاسی، افزایشی و انتقالی **معتبر (sound)** هستند، زیرا هیچ وابستگی تابعی نادرستی تولید نمی کنند. این قواعد **کامل (Complete)** نیز هستند، چون اگر یک مجموعه F از وابستگی های تابعی داشته باشیم، با استفاده از این قواعد می توانیم تمام وابستگی هایی که از F نتیجه می شود (یعنی F^+) را به دست آوریم. بدین معنی که اگر این قواعد به صورت **تکراری** برای **استنتاج** وابستگی های بیشتر به کار گرفته شوند تا جایی که دیگر نتوان

وابستگی جدیدی را **استنتاج** کرد، در نهایت مجموعه‌ای کامل از تمام وابستگی‌های ممکن که می‌توان از F نتیجه گرفت را تولید می‌کند. به عبارت دیگر، مجموعه‌ی F^+ که به آن **بستار وابستگی‌های تابعی F** گفته می‌شود، با استفاده از همین سه قاعده‌ی اصلی قابل استنتاج است.

قواعد فرعی

از طریق ترکیب قواعد اصلی، می‌توان قواعد فرعی زیر را نیز استخراج کرد که برای ساده‌سازی استنتاج‌ها بسیار کاربرد دارند:

۱- قاعده خود تعیینی (Self determination)

$$A \rightarrow A$$

توضیح: هر زیرمجموعه‌ای از مجموعه صفات، خودش را می‌دهد. به عبارت دیگر هر زیرمجموعه‌ای از یک مجموعه صفات، به‌طور بدیهی تابع خود آن زیرمجموعه است. این قاعده همان مفهوم **وابستگی تابعی بدیهی** است.

۲- قاعده ترکیب (Composition)

اگر $A \rightarrow B$ و $C \rightarrow D$ آن‌گاه داریم: $AC \rightarrow BD$

$$\left. \begin{matrix} A \rightarrow B \\ C \rightarrow D \end{matrix} \right\} \Rightarrow AC \rightarrow BD$$

۳- قاعده اجتماع (Union)

اگر $A \rightarrow B$ و $A \rightarrow C$ آن‌گاه داریم: $A \rightarrow BC$

$$\left. \begin{matrix} A \rightarrow B \\ A \rightarrow C \end{matrix} \right\} \Rightarrow A \rightarrow BC$$

۴- قاعده تجزیه (Decomposition)

اگر $A \rightarrow BC$ آن‌گاه داریم: $A \rightarrow B$ و $A \rightarrow C$

$$A \rightarrow BC \Rightarrow \left. \begin{matrix} A \rightarrow B \\ A \rightarrow C \end{matrix} \right\}$$

دقت کنید که از $AB \rightarrow C$ نمی‌توان نتیجه گرفت $B \rightarrow C$ و $A \rightarrow C$ و این موضوع اصلاً ارتباطی به قاعده تجزیه ندارد که اغلب افراد در این مورد دچار خطا می‌شوند.
توجه: قاعده اجتماع و تجزیه عکس هم هستند.

۵- قاعده شبه انتقالی یا شبه تعدی (Pseudotransitivity)

اگر $A \rightarrow B$ و $BC \rightarrow D$ آن‌گاه داریم: $AC \rightarrow D$

$$\left. \begin{matrix} A \rightarrow B \\ BC \rightarrow D \end{matrix} \right\} \Rightarrow ABC \rightarrow BD \Rightarrow AC \rightarrow BD \Rightarrow \begin{matrix} AC \rightarrow B \\ AC \rightarrow D \end{matrix}$$

چون $A \rightarrow B$ ، می‌توان به جای $ABC \rightarrow BD$ در سمت چپ نوشت $AC \rightarrow BD$. در عبارت ساده‌تر چون $A \rightarrow B$ ، می‌توان به جای $BC \rightarrow D$ در سمت چپ نوشت $AC \rightarrow D$ چون می‌توان به جای B صفت A گذاشت. چون A صفت B را می‌دهد.

۶- قاعده اتحاد یا همسان‌سازی کلی (General Unification)

اگر $A \rightarrow B$ و $C \rightarrow D$ آن‌گاه داریم: $A \cup (C - B) \rightarrow BD$

$$\left. \begin{matrix} A \rightarrow B \\ C \rightarrow D \end{matrix} \right\} \Rightarrow AC \rightarrow BD$$

چون به واسطه $A \rightarrow B$ ستون‌های A ستون‌های B را می‌دهد. و آن بخش از ستون‌های C که به واسطه $C - B$ ستون‌های B از آن برداشته شده است، توسط $A \rightarrow B$ ستون‌های B مجدد باز می‌گردد و مجدد ستون‌های C کامل می‌شود.

بستار صفات

همانطور که مفهوم بستار برای یک مجموعه از وابستگی‌های تابعی تعریف می‌شود، می‌توان بستار را برای یک مجموعه از خصیصه‌ها نیز تعریف کرد. اگر R یک رابطه و F مجموعه‌ای از وابستگی‌های تابعی تعریف‌شده روی این رابطه باشد، و A زیرمجموعه‌ای از خصیصه‌های رابطه R باشد، در این صورت بستار A ، شامل تمام خصیصه‌هایی است که با استفاده از وابستگی‌های تابعی موجود در F ، از A قابل استنتاج است. بستار A را با نماد A^+ نمایش می‌دهند.

یعنی خود A + همه صفت‌هایی که A و وابسته‌های آن می‌دهد $\{A\}^+ =$

مثال ۱: رابطه $R(A, B, C)$ با مجموعه وابستگی‌های تابعی (FD) زیر مفروض است:

$$F = \{A \rightarrow B, AB \rightarrow C\}$$

آیا وابستگی $A \rightarrow C$ عضو بستار F^+ است؟

حل کلاسیک: بله. زیرا، $A \rightarrow B$ عضو F است و مطابق قاعده افزایشی می‌توان خصیصه A را به طرفین این وابستگی اضافه کرد و $A \rightarrow AB$ را به دست آورد. در ادامه مطابق قاعده تعدی با داشتن $AB \rightarrow C$ و $A \rightarrow AB$ می‌توان $A \rightarrow C$ را نتیجه گرفت.

$$\begin{aligned} A \rightarrow B &\xrightarrow{\times A} AA \rightarrow AB \Rightarrow A \rightarrow AB \\ \left. \begin{matrix} A \rightarrow AB \\ AB \rightarrow C \end{matrix} \right\} &\Rightarrow A \rightarrow C \end{aligned}$$

حل سریع (بستار صفات): بله. زیرا محاسبه $\{A\}^+$ از مجموعه F به صورت زیر است:

$$\{A \rightarrow C\} \Rightarrow$$

$$\{A\}^+ = \{A\} \Rightarrow$$

$$A \rightarrow B \Rightarrow \{A, B\}$$

$$AB \rightarrow C \Rightarrow \{A, B, \boxed{C}\}$$

$$\{A\}^+ = \{A, B, \boxed{C}\}$$

بنابراین با مجموعه F راهی برای رسیدن از A به C داریم، پس $A \rightarrow C$ عضو F^+ است. زیرا، A را می‌دهد (اعضای یک مجموعه اولیه، حتما عضو بستار آن هستند، چون خودش، خودش را می‌دهد)، همچنین مطابق $A \rightarrow B$ ، صفت A صفت B را می‌دهد و در نهایت مطابق $AB \rightarrow C$ صفات AB باهم صفت C را می‌دهد. بنابراین مطابق وابستگی‌ها از A به C رسیدیم.

حل سریع‌تر: به واسطه وابستگی $A \rightarrow B$ می‌توان در وابستگی $AB \rightarrow C$ به جای صفت B صفت A قرار داد. چون صفت A صفت B را تولید می‌کند. $AB \rightarrow C \Rightarrow AA \rightarrow C \Rightarrow A \rightarrow C$ در وابستگی $AB \rightarrow C$ صفت B زائد است، چون خود A صفت B را تولید می‌کند.

نتیجه بسیار مهم: اگر یک وابستگی تابعی مثل $A \rightarrow C$ در A^+ باشد، در F^+ نیز هست. بنابراین برای نشان دادن اینکه $A \rightarrow C$ در F^+ وجود دارد، نیازی به محاسبه F^+ نیست، کفایت A^+ را به دست آورد، یعنی استفاده از بستار صفات، به جای استفاده از بستار وابستگی تابعی.

مثال ۲: رابطه $R(A, B, C, D, E, F)$ با مجموعه وابستگی‌های تابعی (FD) زیر مفروض است:

$$F = \{A \rightarrow BC, B \rightarrow E, CD \rightarrow EF\}$$

آیا وابستگی $AD \rightarrow F$ عضو بستار F^+ است؟

حل کلاسیک: بله. زیرا، $A \rightarrow BC$ عضو F است و مطابق قاعده تجزیه می‌توان وابستگی‌های $A \rightarrow B$ و $A \rightarrow C$ را به دست آورد. در ادامه مطابق قاعده افزایش می‌توان خصیصه D را به طرفین وابستگی $A \rightarrow C$ اضافه کرد و $AD \rightarrow CD$ را به دست آورد. سپس مطابق قاعده تعدی با داشتن $CD \rightarrow EF$ و $AD \rightarrow CD$ می‌توان $AD \rightarrow EF$ را به دست آورد. و در نهایت مطابق قاعده تجزیه از $AD \rightarrow EF$ می‌توان وابستگی‌های $AD \rightarrow F$ و $AD \rightarrow E$ را نتیجه گرفت.

$$A \rightarrow BC \Rightarrow \begin{matrix} A \rightarrow B \\ A \rightarrow C \end{matrix}$$

$$A \rightarrow C \xRightarrow{\times D} AD \rightarrow CD$$

$$\left. \begin{matrix} AD \rightarrow CD \\ CD \rightarrow EF \end{matrix} \right\} \Rightarrow AD \rightarrow EF \Rightarrow \begin{matrix} AD \rightarrow E \\ AD \rightarrow F \end{matrix}$$

حل سریع: بله. زیرا محاسبه $\{AD\}^+$ از مجموعه F به صورت زیر است:

$$\{AD \rightarrow F\} \Rightarrow$$

$$\{AD\}^+ = \{A, D\} \Rightarrow$$

$$A \rightarrow BC \Rightarrow \{A, D, B, C\}$$

$$B \rightarrow E \Rightarrow \{A, D, B, C, E\}$$

$$CD \rightarrow EF \Rightarrow \{A, D, B, C, E, \boxed{F}\}$$

$$\{AD\}^+ = \{A, D, B, C, E, \boxed{F}\}$$

بنابراین با مجموعه F راهی برای رسیدن از AD به صفت F داریم، پس $AD \rightarrow F$ عضو F^+ است. زیرا، A، A را می‌دهد، D، D را می‌دهد، همچنین مطابق $A \rightarrow BC$ ، صفت A صفات BC را می‌دهد، در ادامه مطابق $B \rightarrow E$ صفت B صفت E را می‌دهد و در نهایت مطابق $CD \rightarrow EF$ صفات CD باهم صفات E و F را می‌دهد. بنابراین مطابق وابستگی‌ها از AD به F رسیدیم.

مثال ۳: رابطه $R(A, B, C, D, E, F, G, H)$ با مجموعه وابستگی‌های تابعی (FD) زیر مفروض

است:

$$F = \{A \rightarrow E, BC \rightarrow F, E \rightarrow G, AC \rightarrow D, E \rightarrow H, BG \rightarrow C, GH \rightarrow C\}$$

آیا وابستگی $A \rightarrow C$ عضو بستار F^+ است؟

حل کلاسیک: بله. زیرا، مطابق قاعده اجتماع با داشتن $E \rightarrow H$ و $E \rightarrow G$ می‌توان $E \rightarrow GH$ را به دست آورد. در ادامه مطابق قاعده تعدی با داشتن $GH \rightarrow C$ و $E \rightarrow GH$ می‌توان $E \rightarrow C$ را به دست آورد و در نهایت مطابق قاعده تعدی با داشتن $E \rightarrow C$ و $A \rightarrow E$ می‌توان $A \rightarrow C$ را نتیجه گرفت.

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} E \rightarrow G \\ E \rightarrow H \end{array} \right\} &\Rightarrow E \rightarrow GH \\ \left. \begin{array}{l} E \rightarrow GH \\ GH \rightarrow C \end{array} \right\} &\Rightarrow E \rightarrow C \\ \left. \begin{array}{l} A \rightarrow E \\ E \rightarrow C \end{array} \right\} &\Rightarrow A \rightarrow C \end{aligned}$$

حل سریع: بله. زیرا محاسبه $\{A\}^+$ از مجموعه F به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \{A \rightarrow C\} &\Rightarrow \\ \{A\}^+ &= \{A\} \Rightarrow \\ A \rightarrow E &\Rightarrow \{A, E\} \\ E \rightarrow G &\Rightarrow \{A, E, G\} \\ E \rightarrow H &\Rightarrow \{A, E, G, H\} \\ GH \rightarrow C &\Rightarrow \{A, E, G, H, \boxed{C}\} \\ \{A\}^+ &= \{A, E, G, H, \boxed{C}\} \end{aligned}$$

بنابراین با مجموعه F راهی برای رسیدن از A به صفت C داریم، پس $A \rightarrow C$ عضو F^+ است. زیرا، A، A را می‌دهد، همچنین مطابق $A \rightarrow E$ ، صفت A صفت E را می‌دهد، در ادامه مطابق $E \rightarrow G$ صفت E صفت G را می‌دهد، همچنین مطابق $E \rightarrow H$ صفت E صفت H را می‌دهد و در نهایت مطابق $GH \rightarrow C$ صفات GH باهم صفت C را می‌دهد. بنابراین مطابق وابستگی‌ها از A به C رسیدیم.

کاربرد ابرکلید چیست؟

کشف کلید کاندید از دو طریق (۱) ابرکلید و (۲) وابستگی‌های تابعی امکان‌پذیر است. **کشف کلید کاندید** از طریق ابرکلید در فصل سوم (مدل رابطه‌ای) بررسی شد. **یادآوری خلاصه فصل:** هدف این فصل **کشف کلید کاندید** از روی **وابستگی‌های تابعی** است، چون فرآیند **نرمال‌سازی** با کشف کلید کاندید شروع می‌شود. در ادامه، **کشف کلید کاندید** از طریق **وابستگی‌های تابعی** بررسی می‌شود.

کشف کلید کاندید از طریق وابستگی‌های تابعی

همانطور که گفتیم، ریاضیات پایه فرآیند نرمال‌سازی، تئوری **وابستگی‌های تابعی** است. و فرآیند **نرمال‌سازی** با کشف کلید کاندید شروع می‌شود. کشف کلید کاندید با بررسی روابط بین

ستون‌های یک جدول، که همان وابستگی‌های تابعی هستند، انجام می‌شود. در ادامه قوانینی **منظم** و **ثابت** جهت کشف **دقیق** و **قطعی** کلید کاندید ارائه شده است.

قوانین چهارگانه

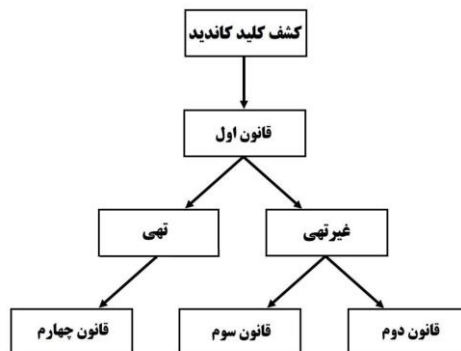
به طور کلی **کلید کاندید** باید دو شرط زیر را داشته باشد:

- ۱- ابرکلید باشد (خاصیت کلیدی داشته باشد) یعنی همه خصیصه‌ها را تولید کند.
- ۲- عضو زائد نداشته باشد.

به طور کلی **عضو کلید کاندید** از روابط زیر به دست می‌آید:

توجه: ما نام این روابط را به عنوان مبدع آن «**قوانین استاد ارسطو خلیلی فر**» نام‌گذاری کردیم، این قوانین به «**قوانین چهارگانه**» نیز موسوم است. این قوانین در سال ۱۳۸۴ در اداره کل مالکیت فکری و معنوی و کتابخانه ملی ایران به **ثبت** رسیده است و توسط انتشارات بابان (راهیان ارشد و دکتری) و وزارت فرهنگ و ارشاد اسلامی **منتشر** شده است. این کتاب موفق به دریافت **جایزه کتاب سال ایران** در حوزه مهندسی کامپیوتر شده است. این قوانین، جایگزین مناسبی برای قواعد آرمسترانگ است و مستقل از راه حل‌های کلاسیک می‌تواند سوال را به نتیجه قطعی برساند.

نمودار فعالیت قوانین چهارگانه



قانون اول (قانون تفاضل یا قانون تعیین سطح)

روش اول:

اجتماع تمام خصیصه‌های سمت راست وابستگی‌های غیربدیهی - تمام خصیصه‌های جدول = عضو کلید کاندید

توجه: نتیجه هر تفاضل، یا **غیر تهی** است یا **تهی**.

روش دوم:

$$\text{عضو کلید کاندید} = R - \bigcup_{i=1}^n [x_i - (\text{چپ}) - y_i - (\text{راست})]$$

توجه: عبارت $[x_i - (\text{چپ}) - y_i - (\text{راست})]$ به طور مستقل بر روی تک تک وابستگی ها انجام می گردد.

$$A \rightarrow BC \Rightarrow BC - A = BC$$

مثال:

توجه: استفاده از روش اول مستلزم گام ابتدایی **حذف وابستگی های تابعی بدیهی** است، اگر در حذف وابستگی های بدیهی دچار خطا می شوید، از روش دوم استفاده نمایید.

وابستگی تابعی بدیهی: اگر در یک وابستگی، بخش سمت راست، زیر مجموعه بخش سمت چپ باشد آن وابستگی را، وابستگی تابعی بدیهی می نامند.

$$AB \rightarrow A \quad \text{یا} \quad A \rightarrow A$$

مثال:

قانون دوم

هرگاه عضو کلید کاندید، حاصل از تفاضل قانون اول (روش اول یا دوم) همه ستون ها را تولید کند، آن عضو کلید کاندید، **تنها کلید کاندید** جدول خواهد بود.

توجه: در قانون دوم، یک جدول 100% فقط و فقط **یک کلید کاندید** دارد و تحت هیچ شرایطی کلید کاندید دیگری ندارد.

مثال ۱: رابطه $R(A, B, C, D, E)$ با مجموعه وابستگی های

$$F = \{C \rightarrow D, A \rightarrow C, E \rightarrow AD, AB \rightarrow C, AB \rightarrow B, E \rightarrow E\}$$

مفروض است، **کلید**

کاندید رابطه R چیست؟

حل: با توجه به وابستگی های مطرح شده داریم:

$$C \rightarrow D$$

$$A \rightarrow C$$

$$E \rightarrow AD$$

$$AB \rightarrow C$$

$$AB \rightarrow B$$

$$E \rightarrow E$$

در مجموعه وابستگی های فوق وابستگی های $AB \rightarrow B, E \rightarrow E$ ، **بدیهی** هستند، بنابراین مطابق

آنچه در **قانون اول** گفتیم، ابتدا باید **وابستگی های بدیهی** از مجموعه وابستگی های تابعی **حذف** شوند، به صورت زیر:

$C \rightarrow D$
 $A \rightarrow C$
 $E \rightarrow AD$
 $AB \rightarrow C$

مطابق قانون اول (قانون تفاضل) داریم:

اجتماع تمام خصیصه‌های سمت راست وابستگی‌های غیربدیهی - تمام خصیصه‌های جدول = عضو کلید کاندید

$$ABCDE - ACD = BE$$

بنابر رابطه فوق، صفات BE حتماً باید **عضو کلید کاندید** باشد. بستر صفات BE به صورت زیر است:

$$\{BE\}^+ = \{B, E\} \Rightarrow$$

$$E \rightarrow AD \Rightarrow \{B, E, A, D\}$$

$$A \rightarrow C \Rightarrow \{B, E, A, D, C\}$$

$$\{BE\}^+ \Rightarrow \{B, E, A, D, C\}$$

توجه: شما با داشته‌های ابتدایی تون مثل $\{BE\}^+ = \{B, E\}$ می‌تونید به چیزهای جدیدتر برسید.

تو پای به راه در نه و هیچ مپرس خود راه بگویدت که چون باید رفت (عطارد)

براساس بستر فوق، صفات BE، همه ستون‌های جدول R را تولید می‌کند، پس مطابق **قانون دوم**

صفات BE **تنها کلید کاندید** جدول R است. و تحت هیچ شرایطی کلید کاندید دیگری ندارد.

توجه: اگر صفات دیگری به BE اضافه شود **ابرکلیدهای** مختلف ایجاد می‌شود. برای مثال

مجموعه صفات ABE ابرکلید است، زیرا، عضو زائد A را دارد، هر چند عضو کلید کاندید BE را دارد. صفات BE همه ستون‌ها را به تنهایی با استفاده از وابستگی‌های مطرح شده تولید می‌کنند، بنابراین صفت A، عضو زائد است، و ABE فقط ابرکلید است و کلید کاندید نیست.

مثال ۲: رابطه $R(A, B, C, D, E)$ با مجموعه وابستگی‌های $F = \{E \rightarrow CB, BE \rightarrow AD\}$

مفروض است، **کلید کاندید** رابطه R چیست؟

حل: با توجه به وابستگی‌های مطرح شده داریم:

$$E \rightarrow CB$$

$$BE \rightarrow AD$$

$$ABCDE - ABCD = E$$

بنابر رابطه فوق، صفت E حتماً باید **عضو کلید کاندید** باشد. بستر صفت E به صورت زیر است:

$$\{E\}^+ = \{E\} \Rightarrow$$

$$E \rightarrow CB \Rightarrow \{E, C, B\}$$

$$BE \rightarrow AD \Rightarrow \{E, C, B, A, D\}$$

$$\{E\}^+ = \{E, C, B, A, D\}$$

براساس بستر فوق، صفت E، همه ستون‌های جدول R را تولید می‌کند، پس مطابق **قانون دوم** صفت E **تنها کلید کاندید** جدول R است. و تحت هیچ شرایطی کلید کاندید دیگری ندارد.

مثال ۳: رابطه $R(A, B, C, D, E)$ با مجموعه وابستگی‌های

$$F = \{A \rightarrow C, B \rightarrow D, C \rightarrow E, C \rightarrow B\}$$

حل: با توجه به وابستگی‌های مطرح شده داریم:

$$A \rightarrow C$$

$$B \rightarrow D$$

$$C \rightarrow E$$

$$C \rightarrow B$$

$$ABCDE - BCDE = A$$

بنابر رابطه فوق، صفت A حتماً باید **عضو کلید کاندید** باشد. بستر صفت A به صورت زیر است:

$$\{A\}^+ = \{A\} \Rightarrow$$

$$A \rightarrow C \Rightarrow \{A, C\}$$

$$C \rightarrow E \Rightarrow \{A, C, E\}$$

$$C \rightarrow B \Rightarrow \{A, C, E, B\}$$

$$B \rightarrow D \Rightarrow \{A, C, E, B, D\}$$

$$\{A\}^+ = \{A, C, E, B, D\}$$

براساس بستر فوق، صفت A، همه ستون‌های جدول R را تولید می‌کند، پس مطابق **قانون دوم** صفت A **تنها کلید کاندید** جدول R است. و تحت هیچ شرایطی کلید کاندید دیگری ندارد.

مثال ۴: رابطه $R(A, B, C, D, E)$ با مجموعه وابستگی‌های $F = \{A \rightarrow B, D \rightarrow AE, B \rightarrow C\}$

مفروض است، **کلید کاندید** رابطه R چیست؟

حل: با توجه به وابستگی‌های مطرح شده داریم:

$A \rightarrow B$
 $D \rightarrow AE$
 $B \rightarrow C$

$$ABCDE - ABCE = D$$

بنابر رابطه فوق صفت D حتماً باید عضو کلید کاندید باشد. بستار صفت D به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \{D\}^+ &= \{D\} \Rightarrow \\ D \rightarrow AE &\Rightarrow \{D, A, E\} \\ A \rightarrow B &\Rightarrow \{D, A, E, B\} \\ B \rightarrow C &\Rightarrow \{D, A, E, B, C\} \\ \{D\}^+ &= \{D, A, E, B, C\} \end{aligned}$$

براساس بستار فوق، صفت D، همه ستون‌های جدول R را تولید می‌کند، پس مطابق قانون دوم صفت D تنها کلید کاندید جدول R است. و تحت هیچ شرایطی کلید کاندید دیگری ندارد.

مثال ۵: رابطه $R(A, B, C, D, E, F, G)$ با مجموعه وابستگی‌های

$$F = \{AF \rightarrow BE, FC \rightarrow DE, F \rightarrow CD, D \rightarrow E, C \rightarrow A\}$$

رابطه R چیست؟

حل: با توجه به وابستگی‌های مطرح شده داریم:

$AF \rightarrow BE$
 $FC \rightarrow DE$
 $F \rightarrow CD$
 $D \rightarrow E$
 $C \rightarrow A$

$$ABCDEFG - ABCDE = FG$$

بنابر رابطه فوق صفات FG حتماً باید عضو کلید کاندید باشد. بستار صفات FG به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \{FG\}^+ &= \{F, G\} \Rightarrow \\ F \rightarrow CD &\Rightarrow \{F, G, C, D\} \\ FC \rightarrow DE &\Rightarrow \{F, G, C, D, E\} \\ C \rightarrow A &\Rightarrow \{F, G, C, D, E, A\} \\ AF \rightarrow BE &\Rightarrow \{F, G, C, D, E, A, B\} \\ \{FG\}^+ &= \{F, G, C, D, E, A, B\} \end{aligned}$$

براساس بستار فوق، صفات FG، همه ستون‌های جدول R را تولید می‌کند، پس مطابق قانون دوم

صفات FG تنها کلید کاندید جدول R است. و تحت هیچ شرایطی کلید کاندید دیگری ندارد.

مثال ۶: رابطه $R(A, B, C, D, E, F, G, H, I)$ با مجموعه وابستگی‌های

$F = \{A \rightarrow BDI, ABH \rightarrow G, GI \rightarrow EF, AH \rightarrow DE\}$ مفروض است، کلید کاندید رابطه

R چیست؟

حل: با توجه به وابستگی‌های مطرح شده داریم:

$$A \rightarrow BDI$$

$$ABH \rightarrow G$$

$$GI \rightarrow EF$$

$$AH \rightarrow DE$$

$$ABCDEFGHI - BDEFGI = ACH$$

بنابر رابطه فوق صفات ACH حتماً باید عضو کلید کاندید باشد. بستار صفات ACH به صورت زیر است:

$$\{ACH\}^+ = \{A, C, H\} \Rightarrow$$

$$A \rightarrow BDI \Rightarrow \{A, C, H, B, D, I\}$$

$$ABH \rightarrow G \Rightarrow \{A, C, H, B, D, I, G\}$$

$$GI \rightarrow EF \Rightarrow \{A, C, H, B, D, I, G, E, F\}$$

$$\{ACH\}^+ = \{A, C, H, B, D, I, G, E, F\}$$

براساس بستار فوق، صفات ACH ، همه ستون‌های جدول R را تولید می‌کند، پس مطابق **قانون دوم** صفات ACH تنها کلید کاندید جدول R است. و تحت هیچ شرایطی کلید کاندید دیگری ندارد.

مثال ۷: رابطه $R(A, B, C, D, E)$ با مجموعه وابستگی‌های

$F = \{D \rightarrow E, E \rightarrow A, A \rightarrow D, B \rightarrow E\}$ مفروض است، کلید کاندید رابطه R چیست؟

حل: با توجه به وابستگی‌های مطرح شده داریم:

$$D \rightarrow E$$

$$E \rightarrow A$$

$$A \rightarrow D$$

$$B \rightarrow E$$

$$ABCDE - ADE = BC$$

بنابر رابطه فوق صفات BC حتماً باید عضو کلید کاندید باشد. بستار صفات BC به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \{BC\}^+ &= \{B, C\} \Rightarrow \\ B \rightarrow E &\Rightarrow \{B, C, E\} \\ E \rightarrow A &\Rightarrow \{B, C, E, A\} \\ A \rightarrow D &\Rightarrow \{B, C, E, A, D\} \\ \{BC\}^+ &= \{B, C, E, A, D\} \end{aligned}$$

براساس بستار فوق، صفات BC، همه ستون‌های جدول R را تولید می‌کند، پس مطابق **قانون دوم** صفات BC **تنها کلید کاندید** جدول R است. و تحت هیچ شرایطی کلید کاندید دیگری ندارد.

قانون سوم

هرگاه **عضو کلید کاندید**، حاصل از تفاضل قانون اول (روش اول یا دوم)، **برخی** از ستون‌ها را تولید کند، بدین معنی است که، جدول موردنظر، قطعاً **چندین کلید کاندید** دارد، که این عضو کلید کاندید، در بین تمامی کلیدهای کاندید، به طور **مشترک** قرار دارد، بنابراین **صفات کمکی** دیگری نیز، باید عضو کلید کاندید را همراهی کنند تا کلید کاندید ایجاد گردد. صفات کمکی باید قدرت تولید صفات دیگر را داشته باشند پس باید از **صفات سمت چپ** وابستگی‌های تابعی انتخاب شوند. همچنین مطابق این قانون، صفاتی که توسط عضو کلید کاندید، قابل دسترسی هستند، در کلید کاندید جایگاهی نخواهند داشت.

توجه: در قانون سوم یک جدول 100% **بیش از یک کلید کاندید** دارد. $\{2, 3, 4, \dots, \infty\}$

مثال ۱: رابطه $R(A, B, C, D, E)$ با مجموعه وابستگی‌های $F = \{BCD \rightarrow AE, A \rightarrow CDE\}$

مفروض است، **کلیدهای کاندید** رابطه R چیست؟

حل: با توجه به وابستگی‌های مطرح شده داریم:

$$\begin{aligned} BCD &\rightarrow AE \\ A &\rightarrow CDE \end{aligned}$$

$$ABCDE - ACDE = B$$

بنابر رابطه فوق صفت B حتماً باید **عضو کلید کاندید** باشد. بستار صفت B به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \{B\}^+ &= \{B\} \Rightarrow \\ \times &\Rightarrow \text{STOP} \end{aligned}$$

براساس بستار فوق، صفت B، فقط ستون B را تولید می‌کند، پس فقط **عضو کلید کاندید** است و کلید کاندید نمی‌باشد. بنابراین مطابق **قانون سوم** باید **صفات کمکی** در کنار صفت B قرار گیرد تا کلید کاندید تولید گردد. این صفات کناری از **صفات باقی‌مانده** انتخاب می‌گردند، صفات باقی‌مانده عبارتند از A و C و D و E که از این مجموعه صفت E را کنار می‌گذاریم، زیرا در

سمت چپ وابستگی‌های تابعی نیست و به تبع در تولید صفات دیگر، کمکی هم نمی‌کند. بنابراین با ترکیب صفات A و C و D با صفت B، کلیدهای کاندید تولید می‌گردند. بر اساس وابستگی‌های تابعی، واضح است که اگر صفت A در کنار **عضو کلید کاندید** B قرار بگیرد، همکاری صفات (A و B) می‌تواند، همه ستون‌ها را تولید کند، بنابراین صفات BA کلید کاندید جدول R خواهد بود.

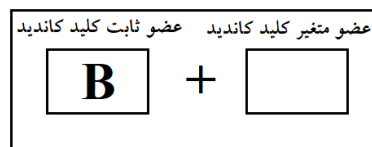
$$\{BA\}^+ = \{B, A\} \Rightarrow$$

$$A \rightarrow CDE \Rightarrow \{B, A, C, D, E\}$$

$$\{BA\}^+ = \{B, A, C, D, E\}$$

بر اساس بستار فوق، صفات (B, A)، همه ستون‌ها را تولید می‌کنند، پس **کلید کاندید** است.

توجه مهم: دقت کنید **عضو کلید کاندید** B هواره **عضو ثابت تمامی کلیدهای کاندید** جدول R است و با چیزی جایگزین نمی‌شود، شکل زیر گویای مطلب است:



کلید کاندید

در ادامه به شکل **رابطه بازگشتی** جهت کشف مابقی کلیدهای کاندید داریم:

کافیست وابستگی باشد که **صفت کمکی** را تولید کند. بنابراین از آنجا که $BCD \rightarrow AE$ ، صفت A را تولید می‌کند به صورت $BCD \rightarrow A$ ، پس می‌توان صفات BCD را جای صفت A در **کلید**

کاندید اول قرار داد و **کلید کاندید دوم** را کشف کرد $\uparrow$ و ترکیب سه خصیصه $(B, \overline{B, C, D})$

(B, C, D) را هم **کلید کاندید دوم** برای این جدول تلقی کرد.

چون وقتی (B, A) **کلید کاندید اول** است و همه ستون‌ها را تولید می‌کند، پس (B, C, D) هم **کلید کاندید دوم** است و همه ستون‌ها را تولید می‌کند، زیرا در نهایت طبق وابستگی $BCD \rightarrow A$ ،

صفات BCD، صفت A را می‌دهد $\uparrow$ و (B, C, D) به (B, A) تبدیل می‌گردد.
(B, A)
(B, $\overline{B, C, D}$)

$$\{BCD\}^+ = \{B, C, D\} \Rightarrow$$

$$BCD \rightarrow AE \Rightarrow \{B, C, D, A, E\}$$

$$\{BCD\}^+ = \{B, C, D, A, E\}$$

بر اساس بستار فوق، صفات (B, C, D)، همه ستون‌ها را تولید می‌کنند، پس **کلید کاندید دوم** است.

توجه: دقت کنید که هیچ گاه، کلید کاندید، نباید عضو زائد داشته باشد. بنابراین رابطه R، در مجموع، دارای **دو کلید کاندید BA و BCD** است که مطابق **قانون سوم**، عضو کلید کاندید **B** در بین هر دو کلید کاندید به طور **مشترک** قرار دارد. به صورت زیر:

$$\{BA\} \cap \{BCD\} = \{B\}$$

مثال ۲: رابطه $R(A, B, C, D, E)$ با مجموعه وابستگی های $F = \{C \rightarrow B, AB \rightarrow C, D \rightarrow E\}$ مفروض است، **کلیدهای کاندید** رابطه R چیست؟

حل: با توجه به وابستگی های مطرح شده داریم:

$$\begin{aligned} C &\rightarrow B \\ AB &\rightarrow C \\ D &\rightarrow E \end{aligned}$$

$$ABCDE - BCE = AD$$

بنابر رابطه فوق صفات AD حتماً باید **عضو کلید کاندید** باشد. بستر صفات AD به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \{AD\}^+ &= \{A, D\} \Rightarrow \\ D \rightarrow E &\Rightarrow \{A, D, E\} \\ \times &\Rightarrow \text{STOP} \end{aligned}$$

بر اساس بستر فوق، صفات AD، فقط ستون های A و D و E را تولید می کند، پس فقط **عضو کلید کاندید** است و کلید کاندید نمی باشد. بنابراین مطابق **قانون سوم** باید **صفات کمکی** در کنار صفات AD قرار گیرد تا کلید کاندید تولید گردد. این صفات کناری از **صفات باقی مانده** انتخاب می گردند، صفات باقی مانده عبارتند از B و C. بنابراین با ترکیب صفات B و C با صفات AD، کلیدهای کاندید تولید می گردند.

بر اساس وابستگی های تابعی، واضح است که اگر صفت B در کنار **عضو کلید کاندید** AD قرار بگیرد، همکاری صفات (ADB) می تواند، همه ستون ها را تولید کند، بنابراین صفات ADB کلید کاندید جدول R خواهد بود.

$$\begin{aligned} \{ADB\}^+ &= \{A, D, B\} \Rightarrow \\ AB \rightarrow C &\Rightarrow \{A, D, B, C\} \\ D \rightarrow E &\Rightarrow \{A, D, B, C, E\} \\ \{ADB\}^+ &= \{A, D, B, C, E\} \end{aligned}$$

بر اساس بستر فوق، صفات (A, D, B)، همه ستون ها را تولید می کنند، پس کلید کاندید است.

توجه: دقت کنید عضو **کلید** **کاندید** AD هواره **عضو ثابت تمامی کلیدهای کاندید** جدول R است و با چیزی جایگزین نمی‌شود.

در ادامه به شکل **رابطه بازگشتی** جهت کشف مابقی کلیدهای کاندید داریم:

کافیست وابستگی باشد که **صفت کمکی** B را تولید کند. بنابراین از آنجا که $C \rightarrow B$ ، صفت B را تولید می‌کند، پس می‌توان صفت C را جای صفت B در **کلید کاندید اول** قرار داد و **کلید**

(A,D,B)

کاندید دوم را کشف کرد $\uparrow$ و ترکیب سه خصیصه (ADC) را هم **کلید کاندید دوم** برای (A,D,C)

این جدول تلقی کرد.

چون وقتی (ADB) **کلید کاندید اول** است و همه ستون‌ها را تولید می‌کند، پس (ADC) هم **کلید کاندید دوم** است و همه ستون‌ها را تولید می‌کند، زیرا در نهایت طبق وابستگی $C \rightarrow B$ ، صفت

(A,D,B)

C، صفت B را می‌دهد $\uparrow$ و (A,D,C) به (A,D,B) تبدیل می‌گردد. (A,D,C)

$$\{ADC\}^+ = \{A,D,C\} \Rightarrow$$

$$C \rightarrow B \Rightarrow \{A,D,C,B\}$$

$$D \rightarrow E \Rightarrow \{A,D,C,B,E\}$$

$$\{ADC\}^+ = \{A,D,C,B,E\}$$

براساس بستار فوق، صفات (A,D,C)، همه ستون‌ها را تولید می‌کنند، پس **کلید کاندید دوم** است.

توجه: دقت کنید که هیچ‌گاه، کلید کاندید نباید عضو زائد داشته باشد. بنابراین رابطه R، در مجموع، دارای **دو کلید کاندید ADB و ADC** است که مطابق **قانون سوم**، عضو کلید کاندید **AD** در بین هر دو کلید کاندید به طور **مشترک** قرار دارد. به صورت زیر:

$$\{ADB\} \cap \{ADC\} = \{AD\}$$

نتیجه مهم: در **قانون سوم (موسوم به قانون اشتراک)** یک جدول قطعا بیش از یک کلید کاندید دارد و وجه اشتراک همه کلیدها باهم **غیر تهی (عضو ثابت کلید کاندید)** است.

قانون چهارم

هرگاه عضو کلید کاندید، حاصل از تفاضل قانون اول (روش اول یا دوم)، **تهی** گردد، بدین معنی است که، جدول فوق **چندین کلید کاندید** دارد، که هیچ عضو کلید کاندید مشترکی، بین تمامی کلیدهای کاندید آن وجود ندارد. بنابراین باید کلید کاندید با بررسی دقیق بر روی مجموعه

وابستگی تابعی کشف گردد. صفات قابل بررسی باید قدرت تولید صفات دیگر را داشته باشند پس باید از صفات سمت چپ وابستگی‌های تابعی انتخاب شوند. **نقطه شروع**؛ صفات سمت چپی است که بیشترین قدرت تولید صفات دیگر را دارد. اگر صفتی در سمت چپ وابستگی‌های تابعی نیست از مجموعه صفات بررسی کلید کاندید باید حذف شود.

توجه: در قانون چهارم یک جدول 100% بیش از یک کلید کاندید دارد. $\{2, 3, 4, \dots, \infty\}$

مثال ۱: رابطه $R(A, B, C, D, E)$ با مجموعه وابستگی‌های

$F = \{CD \rightarrow E, E \rightarrow A, A \rightarrow BC, B \rightarrow D\}$ مفروض است، **کلیدهای کاندید** رابطه R

چیست؟

حل: با توجه به وابستگی‌های مطرح شده داریم:

$$CD \rightarrow E$$

$$E \rightarrow A$$

$$A \rightarrow BC$$

$$B \rightarrow D$$

$$ABCDE - ABCDE = \{ \} \text{ نهی}$$

بنابراین باید کلید کاندید با بررسی دقیق بر روی مجموعه وابستگی تابعی کشف گردد. صفات A و B و C و D و E همگی در سمت چپ وابستگی‌های تابعی قرار دارند، پس قدرت تولید صفات دیگر را دارند.

$$\{B\}^+ = \{B\} \Rightarrow$$

$$B \rightarrow D \Rightarrow \{B, D\}$$

$$x \Rightarrow \text{STOP}$$

$$\{B\}^+ = \{B, D\}$$

براساس بستر فوق، صفت B، فقط ستون‌های B و D را تولید می‌کند، پس صفت B، کلید کاندید نمی‌باشد.

$$\{A\}^+ = \{A\} \Rightarrow$$

$$A \rightarrow BC \Rightarrow \{A, B, C\}$$

$$B \rightarrow D \Rightarrow \{A, B, C, D\}$$

$$CD \rightarrow E \Rightarrow \{A, B, C, D, E\}$$

$$\{A\}^+ = \{A, B, C, D, E\}$$

براساس بستار فوق، صفت A، همه ستون‌ها را بدون عضو زائد تولید می‌کند، پس صفت A، **کلید** **کاندید اول** می‌باشد.

در ادامه به شکل **رابطه بازگشتی** جهت کشف مابقی کلیدهای کاندید داریم:

صفت E، ستون A را تولید می‌کند $\uparrow$. پس صفت E کلید کاندید است، به صورت زیر:

$$\begin{aligned} \{E\}^+ &= \{E\} \Rightarrow \\ E \rightarrow A &\Rightarrow \{E, A\} \\ A \rightarrow BC &\Rightarrow \{E, A, B, C\} \\ B \rightarrow D &\Rightarrow \{E, A, B, C, D\} \\ \{E\}^+ &= \{E, A, B, C, D\} \end{aligned}$$

براساس بستار فوق، صفت E، همه ستون‌ها را بدون عضو زائد تولید می‌کند، پس صفت E، **کلید** **کاندید دوم** می‌باشد.

صفات CD، ستون E را تولید می‌کند $\uparrow$. پس صفات CD کلید کاندید است، به صورت زیر:

$$\begin{aligned} \{CD\}^+ &= \{C, D\} \Rightarrow \\ CD \rightarrow E &\Rightarrow \{C, D, E\} \\ E \rightarrow A &\Rightarrow \{C, D, E, A\} \\ A \rightarrow BC &\Rightarrow \{C, D, E, A, B\} \\ \{CD\}^+ &= \{C, D, E, A, B\} \end{aligned}$$

براساس بستار فوق، صفات CD، همه ستون‌ها را بدون عضو زائد تولید می‌کند، پس صفات CD، **کلید کاندید سوم** می‌باشد.

صفت B، ستون D را تولید می‌کند $\uparrow$. پس صفات CB کلید کاندید است، به صورت زیر:

$$\begin{aligned} \{CB\}^+ &= \{C, B\} \Rightarrow \\ B \rightarrow D &\Rightarrow \{C, B, D\} \\ CD \rightarrow E &\Rightarrow \{C, B, D, E\} \\ E \rightarrow A &\Rightarrow \{C, B, D, E, A\} \\ \{CB\}^+ &= \{C, B, D, E, A\} \end{aligned}$$

براساس بستار فوق، صفات CB، همه ستون‌ها را بدون عضو زائد تولید می‌کند، پس صفات CB،

کلید کاندید چهارم می باشد.

توجه: همان طور که مشاهده می شود، رابطه R، دارای **چهار کلید کاندید A و E** و **CD و CB** است که مطابق **قانون چهارم**، هیچ عضو کلید کاندید مشترکی، بین تمامی کلیدهای کاندید فوق وجود ندارد. به صورت زیر:

$$\{A\} \cap \{E\} \cap \{CD\} \cap \{CB\} = \{ \}$$

نتیجه مهم: در **قانون چهارم (موسوم به قانون اشتراک)** یک جدول قطعا بیش از یک کلید کاندید دارد و وجه اشتراک همه کلیدها باهم **تهی** است. دقت کنید ما به وجه اشتراک برخی کلیدها باهم مثل $\{CD\} \cap \{CB\}$ کاری نداریم.

مجموعه وابستگی های تابعی کاهش ناپذیر (حداقل یا کمینه)

با تکرار قواعد آرمسترانگ، وابستگی های تابعی بیشتری برای یک جدول ایجاد می شود. که از بین آنها برخی **اصلی** و برخی **فرعی** (زائد و اضافی) هستند. اگر از یک مجموعه وابستگی تابعی، همه وابستگی های فرعی حذف شوند، آنگاه از یک مجموعه **کاهش پذیر** به **مجموعه کاهش ناپذیر** می رسیم.

مثال: رابطه $R(A, B, C)$ با مجموعه وابستگی های $F = \{A \rightarrow B, B \rightarrow C, A \rightarrow C\}$ مفروض است، وابستگی های **اصلی** و **فرعی** (زائد) کدام هستند؟
حل اول: با توجه به وابستگی های مطرح شده داریم:

$$\begin{aligned} A &\rightarrow B \\ B &\rightarrow C \\ A &\rightarrow C \end{aligned}$$

مطابق **قاعده تعدی** با داشتن $B \rightarrow C$ و $A \rightarrow B$ می توان $A \rightarrow C$ را نتیجه گرفت.

$$\left. \begin{aligned} A &\rightarrow B \\ B &\rightarrow C \end{aligned} \right\} \Rightarrow A \rightarrow C$$

بنابراین وابستگی های $B \rightarrow C$ و $A \rightarrow B$ اصلی و وابستگی $A \rightarrow C$ فرعی (زائد) است.

حل دوم (امن ترین راه حل): همچنین به روش بستر صفات، در **قدم اول**، وابستگی مورد بررسی را از مجموعه **حذف** می کنیم و در **قدم دوم** بررسی می کنیم که آیا از طریق **وابستگی های باقی مانده** دسترس پذیر است یا خیر؟ اگر دسترس پذیر باشد، وابستگی فرعی (زائد) است و اگر دسترس پذیر نباشد، وابستگی اصلی است.

آیا $A \rightarrow B$ زائد است؟ خیر

زیرا، مجموعه $F = \{A \rightarrow B, B \rightarrow C, A \rightarrow C\}$ با حذف وابستگی $A \rightarrow B$ می شود:

$$F' = \{B \rightarrow C, A \rightarrow C\}$$

محاسبه A^+ از مجموعه F'

$$\{A \rightarrow B\}^+ \Rightarrow$$

$$\{A\}^+ = \{A\} \Rightarrow$$

$$A \rightarrow C \Rightarrow \{A, C\}$$

$$\times \Rightarrow \text{STOP}$$

بنابراین با مجموعه $F' = \{B \rightarrow C, A \rightarrow C\}$ هیچ راهی برای رسیدن از A به B نداریم، پس $A \rightarrow B$ زائد نیست و اصلی است.

آیا $B \rightarrow C$ زائد است؟ خیر

زیرا، مجموعه $F = \{A \rightarrow B, B \rightarrow C, A \rightarrow C\}$ با حذف وابستگی $B \rightarrow C$ می شود:

$$F' = \{A \rightarrow B, A \rightarrow C\}$$

محاسبه B^+ از مجموعه F'

$$\{B \rightarrow C\}^+ \Rightarrow$$

$$\{B\}^+ = \{B\}$$

$$\times \Rightarrow \text{STOP}$$

بنابراین با مجموعه $F' = \{A \rightarrow B, A \rightarrow C\}$ هیچ راهی برای رسیدن از B به C نداریم، پس $B \rightarrow C$ زائد نیست و اصلی است.

آیا $A \rightarrow C$ زائد است؟ بله

زیرا، مجموعه $F = \{A \rightarrow B, B \rightarrow C, A \rightarrow C\}$ با حذف وابستگی $A \rightarrow C$ می شود:

$$F' = \{A \rightarrow B, B \rightarrow C\}$$

محاسبه A^+ از مجموعه F'

$$\{A \rightarrow C\}^+ \Rightarrow$$

$$\{A\}^+ = \{A\} \Rightarrow$$

$$A \rightarrow B \Rightarrow \{A, B\}$$

$$B \rightarrow C \Rightarrow \{A, B, \boxed{C}\}$$

بنابراین با مجموعه $F' = \{A \rightarrow B, B \rightarrow C\}$ راهی برای رسیدن از A به C داریم، پس $A \rightarrow C$

زائد (فرعی) است.

قواعد ایجاد مجموعه وابستگی‌های تابعی کاهش‌ناپذیر یا کمینه (minimal cover)

مجموعه وابستگی‌های تابعی کاهش‌ناپذیر براساس شروط زیر ایجاد می‌گردد:

شرط ۱- سمت راست هر وابستگی تابعی باید تک‌خصیصه‌ای باشد. به این معنا که با استفاده از **قاعده تجزیه**، هر وابستگی تابعی به گونه‌ای بازنویسی شود که تنها یک صفت در سمت راست آن قرار گیرد.

$$\{A \rightarrow BC\} \Rightarrow \begin{cases} A \rightarrow B \\ A \rightarrow C \end{cases}$$

شرط ۲- سمت چپ هر وابستگی تابعی باید تا حد امکان کاهش‌ناپذیر (Minimal) باشد. یعنی

صفات زائد موجود در سمت چپ وابستگی حذف شود، به ترتیب اولویت زیر:

اولویت اول: در وابستگی تابعی $X \rightarrow Y$ مثل $AB \rightarrow C$ ، اگر C با زیرمجموعه‌ای از X مثل A به صورت $A \rightarrow C$ وابستگی تابعی داشته باشد. آنگاه صفت B زائد است و باید حذف شود. زیرا با داشتن وابستگی $A \rightarrow C$ و قاعده افزایشی و ضرب B وابستگی $AB \rightarrow C$ قابل تولید است.

$$\begin{cases} X & Y \\ A \rightarrow C & \\ A \rightarrow C & \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \rightarrow C \\ A \rightarrow C \end{cases}$$

فرم ریاضی تعریف فوق به صورت $\{F - \{X \rightarrow Y\}\} \cup \{(X - B) \rightarrow Y\}$ و در نهایت

$\{F - \{AB \rightarrow C\}\} \cup \{(\overline{AB} - B) \rightarrow C\}$ است. یعنی اگر وابستگی $AB \rightarrow C$ توسط عملگر تفاضل از کل F حذف شود. و به جای $AB \rightarrow C$ بنویسیم $A \rightarrow C$ سپس توسط عملگر اجتماع، آنرا به F اضافه کنیم و بازهم بتوان C را نتیجه گرفت. آنگاه B در $AB \rightarrow C$ زائد است و باید حذف شود.

اولویت دوم: صفات سمت چپ هر وابستگی تابعی باید از یکدیگر مستقل باشند؛ یعنی هیچ‌کدام از صفات نباید از سایر صفات موجود در همان سمت قابل استنتاج باشد. در واقع، اگر یکی از صفات سمت چپ را بتوان از بقیه صفات همان سمت نتیجه گرفت، آن صفت زائد است.

$$\begin{cases} A \rightarrow C \\ A \rightarrow B \end{cases} \Rightarrow A \rightarrow B$$

وقتی توسط $A \rightarrow B$ از A به B دسترسی داریم، پس صفت B در کنار A در وابستگی $A \rightarrow C$ صفت زائد (اضافه) است. **چون صد آمد، نود هم پیش ماست.**

تعریف صفت زائد: در یک وابستگی تابعی، اگر بتوان یک صفت را حذف کرد بدون اینکه بستار (closure) مجموعه تغییر کند، به آن صفت، صفت زائد گفته می‌شود.

شرط ۳- تمام وابستگی‌های تابعی فرعی (زائد و اضافه) باید حذف شوند. یعنی هیچ وابستگی موجود در مجموعه نباید قابل استنتاج از سایر وابستگی‌ها باشد.

تعریف وابستگی فرعی (زائد و اضافه): در یک مجموعه وابستگی تابعی، اگر بتوان یک وابستگی را حذف کرد بدون اینکه بستار (closure) مجموعه تغییر کند، به آن وابستگی، وابستگی زائد گفته می‌شود.

مثال ۱: رابطه $R(A, B, C, D)$ با مجموعه وابستگی‌های

$$F = \{AB \rightarrow C, AC \rightarrow D, A \rightarrow B, A \rightarrow BC, B \rightarrow C\}$$

وابستگی‌های تابعی **کاهش‌ناپذیر** چه اعضایی دارد؟

حل: شرط ۱: وابستگی $A \rightarrow BC$ به $A \rightarrow C$ و $A \rightarrow B$ تجزیه می‌شود. در نتیجه مجموعه زیر ایجاد می‌شود:

$$F = \{AB \rightarrow C, AC \rightarrow D, A \rightarrow B, A \rightarrow B, A \rightarrow C, B \rightarrow C\}$$

در مجموعه فوق $A \rightarrow B$ دوبار تکرار شده است که یکی حذف می‌شود:

$$F = \{AB \rightarrow C, AC \rightarrow D, A \rightarrow B, A \rightarrow C, B \rightarrow C\}$$

شرط ۲: اولویت اول: بر اساس وابستگی $A \rightarrow C$ صفت B در سمت چپ $A \rightarrow C$ زائد است. و باید حذف شود.

$$\left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow C \\ A \rightarrow C \end{array} \right\} \Rightarrow A \rightarrow C$$

در نتیجه مجموعه زیر ایجاد می‌شود:

$$F = \{A \rightarrow C, AC \rightarrow D, A \rightarrow B, A \rightarrow C, B \rightarrow C\}$$

در مجموعه فوق $A \rightarrow C$ دوبار تکرار شده است که یکی حذف می‌شود:

$$F = \{A \rightarrow C, AC \rightarrow D, A \rightarrow B, B \rightarrow C\}$$

اولویت دوم: همچنین بر اساس وابستگی $A \rightarrow C$ صفت C در سمت چپ $A \rightarrow C$ زائد است، و باید حذف شود.

$$\left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow C \\ A \rightarrow C \end{array} \right\} \Rightarrow A \rightarrow C$$

در نتیجه مجموعه زیر ایجاد می‌شود:

$$F = \{A \rightarrow C, A \rightarrow D, A \rightarrow B, B \rightarrow C\}$$

شرط ۳: مطابق **قاعده تعدی** با داشتن $B \rightarrow C$ و $A \rightarrow B$ می‌توان $A \rightarrow C$ را نتیجه گرفت.

$$\left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow B \\ B \rightarrow C \end{array} \right\} \Rightarrow A \rightarrow C$$

بنابراین وابستگی $A \rightarrow C$ فرعی (زائد) است و باید حذف شود.

در نتیجه مجموعه کمینه (وابستگی های اصلی) به صورت زیر است:

$$F = \{A \rightarrow D, A \rightarrow B, B \rightarrow C\}$$

راه حل دیگر به روش بستار صفات:

آیا $A \rightarrow C$ زائد است؟ بله

زیرا، مجموعه $F = \{A \rightarrow C, A \rightarrow D, A \rightarrow B, B \rightarrow C\}$ با حذف وابستگی $A \rightarrow C$ می شود:

$$F' = \{A \rightarrow D, A \rightarrow B, B \rightarrow C\}$$

محاسبه A^+ از مجموعه F'

$$\{A \rightarrow C\}^+ \Rightarrow$$

$$\{A\}^+ = \{A\} \Rightarrow$$

$$A \rightarrow D \Rightarrow \{A, D\}$$

$$A \rightarrow B \Rightarrow \{A, D, B\}$$

$$B \rightarrow C \Rightarrow \{A, D, B, \boxed{C}\}$$

بنابراین با مجموعه $F' = \{A \rightarrow D, A \rightarrow B, B \rightarrow C\}$ راهی برای رسیدن از A به C داریم، پس $A \rightarrow C$ زائد (فرعی) است.

نتیجه مهم: بنابراین وابستگی f مثل $A \rightarrow C$ زائد است $f \in F$ ، هرگاه $(F-f)^+ = F^+$ ، یعنی اگر $A \rightarrow C$ از F حذف شود، مجدد در F^+ به طور بازگشتی **حتما** قابل دسترسی باشد.

مثال ۲: رابطه $R(A, B, C, D, E)$ با مجموعه وابستگی های

$$F = \{B \rightarrow C, A \rightarrow C, A \rightarrow E, A \rightarrow B, C \rightarrow E, B \rightarrow E\}$$

وابستگی های تابعی **کاهش ناپذیر** چه اعضایی دارد؟

حل: شرط ۱ و ۲: برقرار است.

شرط ۳: مطابق **قاعده تعدی** با داشتن $B \rightarrow C$ و $A \rightarrow B$ می توان $A \rightarrow C$ را حذف کرد.

$$\left. \begin{matrix} A \rightarrow B \\ B \rightarrow C \end{matrix} \right\} \Rightarrow A \rightarrow C$$

در نتیجه مجموعه زیر ایجاد می شود:

$$F = \{B \rightarrow C, A \rightarrow E, A \rightarrow B, C \rightarrow E, B \rightarrow E\}$$

راه حل دیگر به روش بستار صفات:

آیا $A \rightarrow C$ زائد است؟ بله

زیرا، مجموعه $F = \{B \rightarrow C, A \rightarrow C, A \rightarrow E, A \rightarrow B, C \rightarrow E, B \rightarrow E\}$ با حذف وابستگی $A \rightarrow C$ می‌شود:

$$F' = \{B \rightarrow C, A \rightarrow E, A \rightarrow B, C \rightarrow E, B \rightarrow E\}$$

محاسبه A^+ از مجموعه F'

$$\{A \rightarrow C\}^+ \Rightarrow$$

$$\{A\}^+ = \{A\} \Rightarrow$$

$$A \rightarrow E \Rightarrow \{A, E\}$$

$$A \rightarrow B \Rightarrow \{A, E, B\}$$

$$B \rightarrow C \Rightarrow \{A, E, B, \boxed{C}\}$$

بنابراین با مجموعه $F' = \{B \rightarrow C, A \rightarrow E, A \rightarrow B, C \rightarrow E, B \rightarrow E\}$ راهی برای رسیدن از A به C داریم، پس $A \rightarrow C$ زائد (فرعی) است.

توجه: بررسی اصلی یا فرعی بودن سایر وابستگی‌های باقی‌مانده به روش بستار صفات نیز به همین ترتیب است.

مجموعه کنونی به صورت زیر است:

$$F = \{B \rightarrow C, A \rightarrow E, A \rightarrow B, C \rightarrow E, B \rightarrow E\}$$

همچنین با داشتن $B \rightarrow E$ و $A \rightarrow B$ می‌توان $A \rightarrow E$ را حذف کرد.

$$\left. \begin{matrix} A \rightarrow B \\ B \rightarrow E \end{matrix} \right\} \Rightarrow A \rightarrow E$$

در نتیجه مجموعه زیر ایجاد می‌شود:

$$F = \{B \rightarrow C, A \rightarrow B, C \rightarrow E, B \rightarrow E\}$$

و در نهایت با داشتن $C \rightarrow E$ و $B \rightarrow C$ می‌توان $B \rightarrow E$ را حذف کرد.

$$\left. \begin{matrix} B \rightarrow C \\ C \rightarrow E \end{matrix} \right\} \Rightarrow B \rightarrow E$$

در نتیجه مجموعه کمینه (وابستگی‌های اصلی) به صورت زیر است:

$$F = \{B \rightarrow C, A \rightarrow B, C \rightarrow E\}$$

مثال ۳: رابطه $R(A, B, C, D)$ با مجموعه وابستگی‌های $F = \{B \rightarrow A, D \rightarrow A, AB \rightarrow D\}$

مفروض است، مجموعه وابستگی‌های تابعی **کاهش‌ناپذیر** چه اعضای دارد؟

حل: شرط ۱: برقرار است.

شرط ۲: اولویت اول، برقرار است. اما **اولویت دوم،** بر اساس وابستگی $B \rightarrow A$ صفت A در سمت چپ $AB \rightarrow D$ زائد است. و باید حذف شود.

$$\left\{ \begin{array}{l} \cancel{B \rightarrow D} \\ B \rightarrow A \end{array} \right\} \Rightarrow B \rightarrow A$$

در نتیجه مجموعه زیر ایجاد می شود:

$$F = \{B \rightarrow A, D \rightarrow A, B \rightarrow D\}$$

شرط ۳: مطابق **قاعده تعدی** با داشتن $D \rightarrow A$ و $B \rightarrow D$ می توان $B \rightarrow A$ را حذف کرد.

$$\left\{ \begin{array}{l} B \rightarrow D \\ D \rightarrow A \end{array} \right\} \Rightarrow B \rightarrow A$$

در نتیجه **مجموعه کمینه (وابستگی های اصلی)** به صورت زیر است:

$$F = \{D \rightarrow A, B \rightarrow D\}$$

مثال ۴: رابطه $R(A, B, C, D, E)$ با مجموعه وابستگی های $\{A \rightarrow BCDE, CD \rightarrow E\}$

مفروض است، مجموعه وابستگی های تابعی **کاهش ناپذیر** چه اعضایی دارد؟

حل: شرط ۱: وابستگی $A \rightarrow BCDE$ به $A \rightarrow E, A \rightarrow D, A \rightarrow C, A \rightarrow B$ تجزیه می شود. در نتیجه مجموعه زیر ایجاد می شود:

$$F = \{A \rightarrow B, A \rightarrow C, A \rightarrow D, A \rightarrow E, CD \rightarrow E\}$$

شرط ۲: برقرار است. زیرا، در وابستگی $CD \rightarrow E$ نه C و نه D در سمت چپ زائد نیستند.

شرط ۳: مطابق **قاعده اجتماع** با داشتن $A \rightarrow D, A \rightarrow C$ داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow C \\ A \rightarrow D \end{array} \right\} \Rightarrow A \rightarrow CD$$

همچنین مطابق **قاعده تعدی** با داشتن $CD \rightarrow E$ و $A \rightarrow CD$ می توان $A \rightarrow E$ را حذف کرد.

$$\left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow CD \\ CD \rightarrow E \end{array} \right\} \Rightarrow A \rightarrow E$$

در نتیجه **مجموعه کمینه (وابستگی های اصلی)** به صورت زیر است:

$$F = \{A \rightarrow B, A \rightarrow C, A \rightarrow D, CD \rightarrow E\}$$

توجه بسیار مهم: واضح هست که مجموعه **کمینه**، با استفاده از **قواعد آرمسترانگ**، مجدد قابل

تبدیل به مجموعه **غیر کمینه** است. کفایت مراحل ایجاد مجموعه کمینه به طور عکس و به ترتیب از ۳ به ۱ طی شود تا وابستگی های فرعی (زائد) بازگردد، از همان راه که آمدیم از همان راه هم بازگردیم از مجموعه **کمینه** دوباره می رسیم به مجموعه **غیر کمینه**.

دو مجموعه وابستگی های تابعی معادل (equivalence of sets)

مجموعه وابستگی تابعی $F1$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$F1 = \{B \rightarrow C, A \rightarrow B, C \rightarrow E\}$$

اگر به صورت زیر به $F1$ وابستگی زائد (فرعی) اضافه شود:

$$\left. \begin{array}{l} B \rightarrow C \\ C \rightarrow E \end{array} \right\} \Rightarrow B \rightarrow E$$

به مجموعه $F2$ می‌رسیم:

$$F2 = \{B \rightarrow C, A \rightarrow B, C \rightarrow E, B \rightarrow E\}$$

همچنین اگر به صورت زیر به $F2$ وابستگی زائد (فرعی) اضافه شود:

$$\left. \begin{array}{l} A \rightarrow B \\ B \rightarrow E \end{array} \right\} \Rightarrow A \rightarrow E$$

به مجموعه $F3$ می‌رسیم:

$$F3 = \{B \rightarrow C, A \rightarrow E, A \rightarrow B, C \rightarrow E, B \rightarrow E\}$$

همچنین اگر به صورت زیر به $F3$ وابستگی زائد (فرعی) اضافه شود:

$$\left. \begin{array}{l} A \rightarrow B \\ B \rightarrow C \end{array} \right\} \Rightarrow A \rightarrow C$$

به مجموعه $F4$ می‌رسیم:

$$F4 = \{B \rightarrow C, A \rightarrow C, A \rightarrow E, A \rightarrow B, C \rightarrow E, B \rightarrow E\}$$

بنابراین $F1 \subset F2 \subset F3 \subset F4$ خواهد بود، یعنی هر مجموعه وابستگی کوچکتر، زیرمجموعه، مجموعه بزرگتر از خود است. و مطابق تعریف **مجموعه پوششی** در ریاضیات، هر مجموعه وابستگی بزرگتر به طور سلسله مراتبی یک **پوشش** (Cover) برای مجموعه کوچکتر از خودش است. برای مثال $F4$ یک پوشش برای $F1$ ، $F2$ و $F3$ است. و $F3$ یک پوشش برای $F1$ و $F2$ است. و $F2$ یک پوشش برای $F1$ است. واضح است که هر وابستگی موجود در مجموعه وابستگی بزرگتر قابل استنتاج از مجموعه وابستگی کوچکتر است.

به بزرگترین پوشش مثل $F4$ ، **پوشش بیشینه** (Closure یا F^+) و به کوچکترین پوشش ممکن مثل $F1$ **پوشش کمینه** (minimal cover) گفته می‌شود.

توجه: یک پوشش کمینه (minimal cover) مثل $F1$ ، **معادل** پوشش بیشینه (Closure یا F^+) مثل $F4$ است. زیرا در نهایت بستار $F1^+$ مطابق قواعد استنتاج آرمسترانگ به $F4$ می‌رسد. بنابراین دو مجموعه وابستگی تابعی مثل $F1$ و $F4$ **معادل** هستند اگر و فقط اگر در نهایت $F1^+ = F4^+$.

توجه: به پوشش کمینه (Minimal Cover) **پوشش کانونی** یا استاندارد یا پایه‌ای یا اصلی (Canonical Cover) نیز گفته می‌شود.

مثال: رابطه $R(A, B, C)$ برقرار است، و دو مجموعه وابستگی تابعی به صورت زیر داریم:

$$F1 = \{A \rightarrow B, B \rightarrow C\}$$

$$F2 = \{A \rightarrow B, B \rightarrow C, A \rightarrow C\}$$

آیا $F1$ و $F2$ معادل هستند؟ ($F1^+ = F2^+$)

حل: برای $F1$ مطابق **قاعده تعدی** با داشتن $B \rightarrow C$ و $A \rightarrow B$ می توان $A \rightarrow C$ را نتیجه گرفت.

$$\left. \begin{matrix} A \rightarrow B \\ B \rightarrow C \end{matrix} \right\} \Rightarrow A \rightarrow C$$

بنابراین بستار $F1$ ($F1^+$) معادل بستار $F2$ ($F2^+$) است.

نتیجه: جهت بررسی **معادل بودن** دو مجموعه وابستگی تابعی به خودشان نگاه نمی کنیم، بلکه به **بستار** آنها نگاه می کنیم.

کاربرد پوشش کمینه (minimal cover) در عمل

در عمل و در محیط های واقعی بانک اطلاعات، تعداد وابستگی های تابعی را **افزایش نمی دهند**، بلکه این تئوری از آن جهت مطرح شده است که پس از شناخت وابستگی های تابعی، **کاهش** تعداد آن شروع شود، چون خود وابستگی تابعی چه خوب و چه بد، خودش نوعی **محدودیت جامعیتی** محسوب می شود که تعداد زیاد آن برای DBMS سربار اجرایی و نظارتی ایجاد می کند. ثابت شد پوشش کمینه **معادل** پوشش غیرکمینه است. بنابراین **پوشش کمینه** (minimal cover) همان کار **پوشش غیرکمینه** را می کند، اما با سربار کمتر اجرایی و نظارتی برای DBMS

قدم اول: ساخت پوشش کمینه (minimal cover)

مثال: رابطه $R(A, B, C)$ با مجموعه وابستگی های تابعی (FD) زیر مفروض است:

$$F = \{A \rightarrow B, A \rightarrow C, B \rightarrow C\}$$

وابستگی انتقالی

وابستگی کامل

A	B	C
1	101	202
2	102	203
3	102	203
4	103	202

مجموعه وابستگی‌های تابعی **کاهش‌ناپذیر (پوشش کمینه (minimal cover))** چه اعضایی دارد؟
حل: شرط ۱ و ۲: برقرار است.

شرط ۳: مطابق **قاعده تعدی** با داشتن $A \rightarrow B$ و $B \rightarrow C$ می‌توان $A \rightarrow C$ را حذف کرد.

$$\left. \begin{array}{l} A \rightarrow B \\ B \rightarrow C \end{array} \right\} \Rightarrow A \rightarrow C$$

در نتیجه مجموعه **کاهش‌ناپذیر (پوشش کمینه (minimal cover))** زیر ایجاد می‌شود:

$$F = \{A \rightarrow B, B \rightarrow C\}$$

توجه مهم: در سوالات کنکور، در اغلب موارد نیاز به ساخت پوشش کمینه و سپس نرمال‌سازی نیست و می‌توانیم مستقیم روند نرمال‌سازی را انجام دهیم و خود به خود به پوشش کمینه می‌رسیم که در فصل نرمال‌سازی شرح خواهیم داد.

قدم دوم: نرمال‌سازی

الف) کشف کلید کاندید

ب) کشف وابستگی‌های بد و خوب

ج) حذف وابستگی‌های بد

الف) کشف کلید کاندید

مجموعه **کاهش‌ناپذیر (پوشش کمینه (minimal cover))** به صورت زیر است:

$$F = \{A \rightarrow B, B \rightarrow C\}$$

اجتماع تمام خصیصه‌های سمت راست وابستگی‌های غیربدیهی - تمام خصیصه‌های جدول = عضو کلید کاندید

$$A \not\rightarrow B - BC = A$$

$$\{A\}^+ = \{A\} \Rightarrow$$

$$A \rightarrow B \Rightarrow \{A, B\}$$

$$B \rightarrow C \Rightarrow \{A, B, C\}$$

$$\{A\}^+ = \{A, B, C\}$$

مطابق وابستگی‌های تابعی $F = \{A \rightarrow B, B \rightarrow C\}$ ، ستون A همه ستون‌های دیگر یعنی B و C را می‌دهد، بنابراین ستون A **کلید کاندید** جدول R است.

ب) کشف وابستگی‌های بد و خوب

از بین **وابستگی‌های تابعی** $F = \{A \rightarrow B, B \rightarrow C\}$ کدام **خوب** و کدام **بد** است؟

وابستگی $A \rightarrow B$ **وابستگی تابعی خوب** است و وابستگی $B \rightarrow C$ **وابستگی تابعی بد** است:

وابستگی انتقالی و وابستگی کامل

A	B	C
1	101	202
2	102	203
3	102	203
4	103	202

R

(ج) حذف وابستگی‌های بد (توسط تجزیه (ستز))

با تجزیه جدول، وابستگی بد $B \rightarrow C$ از جدول R حذف می‌شود و مشکل درمان می‌شود. به صورت زیر:

وابستگی کامل

A	B
1	101
2	102
3	102
4	103

R1

وابستگی کامل

B	C
101	202
102	203
103	202

R2

توجه: وابستگی بد $B \rightarrow C$ از جدول R حذف شد و در جدول R2 به وابستگی خوب $B \rightarrow C$ تبدیل شد. وابستگی خوب $A \rightarrow B$ هم از جدول R در جدول R1 در همان نقش وابستگی خوب باقی ماند.

توجه: وابستگی تابعی خوب به طور خودکار تابع قوانین **کلید کاندید** جدول است و سربار برای DBMS محسوب نمی‌شود. از آنجاکه وابستگی‌های تابعی خوب مربوط به موضوع **کلید کاندید** جداول است، بنابراین گارانتی اجرای صحیح آن مربوط به **محدودیت جامعیت داخلی (جامعیت درون رابطه‌ای)** بانک اطلاعات است.

توجه مهم: چه اول پوشش کمینه ایجاد شود و دوم نرمال‌سازی شود. و چه اول نرمال‌سازی شود و دوم پوشش کمینه حاصل شود. آنچه در نهایت اهمیت دارد این است که نتیجه نرمال‌سازی

معادل پوشش کمینه (minimal cover) است.

وابستگی تابعی، نوعی محدودیت جامعیتی

وابستگی تابعی، نوعی محدودیت جامعیتی در پایگاه داده است. آنچه باعث اهمیت پوشش کمینه (minimal cover) شده است، این است که پوشش کمینه معادل بستار وابستگی‌های تابعی یک رابطه است. پوشش کمینه با تعداد کمتر وابستگی‌های تابعی، سربار کمتری برای برقراری محدودیت‌های جامعیتی در DBMS ایجاد می‌کند.

فرض کنید مجموعه‌ای از وابستگی‌های تابعی به نام F روی رابطه R داریم. هرگاه یک کاربر، عملیاتی روی رابطه انجام دهد (مثل درج، حذف یا به‌روزرسانی)، سیستم پایگاه داده باید اطمینان حاصل کند که این عملیات هیچ‌کدام از وابستگی‌های تابعی موجود در F را نقض نمی‌کند. یعنی وضعیت جدید پایگاه داده همچنان باید تمام وابستگی‌های تابعی مجموعه F را ارضا کند. اگر به‌روزرسانی انجام‌شده، یکی از وابستگی‌ها را نقض کند، سیستم باید عملیات را بازگردانی (rollback) کند. بررسی وابستگی‌ها ممکن است پرهزینه باشد، مخصوصاً اگر تعداد زیادی وابستگی در F وجود داشته باشد. بنابراین بهتر است بررسی نه روی خود F ، بلکه روی یک مجموعه ساده‌شده از وابستگی‌ها انجام شود که همان closure را با F داشته باشد، اما بررسی آن سربار کمتر داشته باشد. واضح است که هر پایگاه داده‌ای که مجموعه کمینه (شامل فقط وابستگی‌های اصلی) را ارضا کند، حتماً مجموعه غیرکمینه (شامل وابستگی‌های اصلی و فرعی (زائد)) را نیز ارضا می‌کند، و بالعکس.

توجه: وابستگی‌های تابعی به دو روش صریح توسط دستورات SQL مثل Trigger و Assertion و ضمنی توسط خود تعریف کلید کاندید در DBMS کنترل می‌شود.

روش صریح

مثال: فرض کنید در رابطه $R(A, B, C)$ وابستگی تابعی زیر برای آن برقرار است:

$$F = \{ B \rightarrow C \}$$

```
CREATE ASSERTION fd_B_to_C
CHECK (
  NOT EXISTS (
    SELECT *
    FROM ABC AS T1, ABC AS T2
    WHERE T1.B = T2.B AND T1.C <> T2.C
  )
);
```

این **Assertion** تضمین می‌کند که در **جدول غیر نرمال** R ، برای هر مقدار B فقط یک مقدار C وجود دارد، بنابراین وابستگی تابعی $B \rightarrow C$ برقرار است.
دستور $T1.B = T2.B \text{ AND } T1.C \neq T2.C$ یعنی دو ردیف با مقدار B برابر که مقدار C شان فرق دارد و این یعنی نقض وابستگی تابعی. و در نهایت **NOT EXISTS** یعنی اگر چنین زوج ردیفی وجود نداشته باشد، یعنی وابستگی تابعی برقرار است.

روش ضمنی

روش **ضمنی** توسط تعریف خود کلید اصلی (Primary key) یا کلید فرعی (Unique Constraints) روی جداول در DBMS اعمال می‌شود. در واقعیت، محدودیت جامعیتی ناشی از وابستگی تابعی به طور **ضمنی** کنترل می‌شود. در جدولی مثل R که نرمال 2NF است ولی 3NF نیست، نوعی وابستگی تابعی بد یعنی **وابستگی تابعی انتقالی** وجود دارد. بنابراین نیاز است وابستگی انتقالی به طور **صریح** توسط **Assertion** در همان **جدول غیر نرمال** R کنترل شود. اما **راه حل عاقلانه** این است که اجازه دهیم جدول بیشتر نرمال شود و در سطح نرمال BCNF قرار گیرد تا وابستگی انتقالی و معکوس حذف شود. در این شرایط، جدولی که در نرمال سطح BCNF قرار دارد دیگر وابستگی بخشی، انتقالی و معکوس ندارد، بنابراین محدودیت‌های جامعیتی آن به طور **ضمنی** توسط تعریف خود کلید اصلی کنترل می‌شود.

توجه: در فعالیت نرمال‌سازی پس از تجزیه جداول، به طور خودکار، وابستگی‌های فرعی (زائد) به طور سلسله مراتبی حذف می‌شوند و **پوشش کمینه** ایجاد می‌شود و **محدودیت جامعیتی** ناشی از وابستگی‌های تابعی در نهایت به طور **ضمنی** توسط تعریف خود کلید اصلی روی جداول در DBMS اعمال می‌شود.

نمودار وابستگی‌های تابعی (FD Diagram)

وابستگی‌های تابعی یک رابطه مثل R ، علاوه بر مدل مجموعه‌ای، به صورت نموداری (گرافیکی) نیز قابل نمایش است. در مدل نموداری، صفت‌ها در مستطیل قرار می‌گیرند و پیکانی از آن به صفت وابسته رسم می‌شود. مدل مجموعه‌ای و مدل نموداری در **معنا (Semantic)** کاملاً یکسان، اما در **نحو (Syntax)** متفاوت هستند.

مثال: رابطه $R(A, B, C, D)$ برقرار است. مجموعه وابستگی‌های تابعی آن به صورت زیر است:

$$F = \{A \rightarrow B, A \rightarrow C, B \rightarrow C, A \rightarrow D, B \rightarrow D, D \rightarrow B, AB \rightarrow C\}$$

مدل نموداری مجموعه وابستگی‌های تابعی فوق نیز به صورت زیر است:

